Université Paris Diderot-Paris VII
Département de Sciences Exactes, Licence 2

Algèbre et analyse fondamentales - MA3/MI3
Année 2009-2010, 1er semestre

Correction de l'interrogation n°1

Suites numériques

Le 14 octobre 2009

Durée 40 minutes

Exercice 1 (La méthode d'Héron). *Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. *Montrer que*

$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) = \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2}.$

2. *Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.*

Il est clair que pour $n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

Soit $n \geqslant 1$. Calculons la différence entre deux termes successives de la suite u_n :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{a}{2u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$ et $a - u_n^2 \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante. On peut aussi trouver le résultat en calculant le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.

3. *En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$

En résolvant cette équation, on trouve $\ell = \pm\sqrt{a}$. La seule solution positive est donc $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

4. *En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.*

La relation

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

s'écrit aussi

$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$

Donc

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})} \left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2$$
$$\leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5. *Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que*

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant 1$. Si la proposition est vraie au rang n, alors

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2 \left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \leqslant 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \tag{1}$$

6. *Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.*
Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leq \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leqslant 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $5,2488 \times 10^{-12}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$
En effet, d'après la question précédente,

$$u_n - \sqrt{10} \leqslant 2\sqrt{10}\left(\frac{0,17}{2\sqrt{10}}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 2 \times 4\left(\frac{17 \times 10^{-2}}{2 \times 3}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 8\left(\frac{18 \times 10^{-2}}{6}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 8 \times 3^{2^{n-1}} \times 10^{-2^n}.$$