23/06
fin d'après

Examen du 16 juin

Durée : 3 heures

Barème indicatif : 3, 5, 4, 4, 4.

I

Soit un réel $a > 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{an + (-1)^n}.$$

On se propose de prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1) Dans le cas $a \geq 2$, montrer que l'on peut appliquer à cette série le *théorème sur les séries alternées*.
Conclure.

2) Dans le cas $1 < a < 2$, on posera

$$v_n = \frac{(-1)^n}{an} - u_n$$

Étudier la série $\sum_{n \geq 1} v_n$. Conclure.

II

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(nx).$$

1) Rappeler *brièvement* l'étude de la fonction arctangente sur $[0, +\infty[$: sens de variation, limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on posera $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Soit $\alpha > 0$. Montrer f est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

III

On considère la fonction

$$f(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt.$$

- 1) À l'aide de formules et de théorèmes du cours, que l'on citera, montrer qu'il existe une suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
N.B. : À ce stade, on ne demande pas de calculer les u_n . C'est la suite de l'exercice qui a pour objet le calcul des u_n .
- 2) Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle du type $y' = a(x)y + b(x)$, où a et b sont des fonctions que l'on déterminera.
- 3) À l'aide de cette équation différentielle, établir une relation entre u_{n+1} et u_{n-1} , pour tout $n \geq 1$.
 En déduire finalement la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer les valeurs propres de A , ainsi que les sous-espaces propres qui leurs sont associés. On observera que A est diagonalisable.
- 2) En déduire la solution générale du système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = -2x - y - 4z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}.$$

V

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

- 1) Calculer les valeurs propres de M , ainsi que les sous-espaces propres qui leurs sont associés. La matrice M est-elle diagonalisable?
- 2) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP = T$, où T est une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).