Université Paris Diderot

L2 - MI3 et MA3
2008-2009

Partiel du 8 novembre

Durée : 3 heures

Barème indicatif : 4, 4, 7, 5.

I

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} (\cos n) 2^{-n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right) \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n} .$$

CV CV CV

Indication pour la troisième série : on commencera par calculer un DL en 0, à l'ordre 3, de la fonction $f(x) = \sin x - x \cos x$.

II

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{z^{4n}}{16^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n^4}}{16^n} .$$

$0, -\infty, +\infty$

$\frac{z}{16}, 0, 0, -\infty, +\infty$

III

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$.

1) Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on posera $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2) À l'aide d'un théorème du cours, que l'on citera, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

3) a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser AU CHOIX l'une des deux méthodes suivantes :

– *Étudier la fonction*

$$x \mapsto \frac{x}{(n^2+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$ *et en déduire la valeur de* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)|$.

– *Établir les inégalités*

$$\frac{2x}{n^2+x^2} \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

pour tout entier $n > 0$ *et tout réel* $x \geq 0$.

b) À l'aide d'un théorème du cours, que l'on citera, montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) On se propose d'établir que la fonction f tend vers 0 à l'infini moins vite que la fonction $x \mapsto x^{-2}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x| \geq \sqrt{m}$. Montrer que

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{x^2(n+1)}.$$

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = +\infty$.

IV

Dans cet exercice, les développements en série entière demandés sont des développements en zéro, i.e. de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. *Pour une telle série entière, il est impératif de préciser le rayon de convergence.*

1) Calculer les développements en série entière des fonctions $f(x) = (2+x)^{-1}$ et $g(x) = \ln(2+x)$.

$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n!}$ $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

2) Calculer le développement en série entière de la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x^2+x-2}.$$

3) Montrer que la fonction $u(x) = \ln(2-x-x^2)$ est définie dans un voisinage de 0 et calculer son développement en série entière. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1-x-x^2)^n}{n}$