

Corrigé du partiel du 8 novembre

I

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}} \quad , \quad \sum_{n \geq 0} (\cos n) 2^{-n} \quad , \quad \sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right) \quad , \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}.$$

On désignera par u_n le terme général de chacune de ces séries.

1) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et $u_n \leq n^{-3/2}$ pour tout $n \geq 1$. Puisque la série $\sum n^{-3/2}$ est convergente (série de Riemann d'exposant > 1), il en est de même pour la série $\sum u_n$.

2) On a $|u_n| \leq 2^{-n}$ et la série géométrique $\sum 2^{-n}$ est une série géométrique convergente. La série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

3) À partir des DL connus : $\sin x = x - (1/6)x^3 + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - (1/2)x^2 + o(x^2)$, on obtient $\sin x - x \cos x = (1/3)x^3 + o(x^3)$. On en déduit que $u_n \sim 1/3n^3$. Comme la série $\sum (1/n^3)$ est convergente (série de Riemann d'exposant > 1 , *bis repetita*), on conclut que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Pour tout $n \geq 1$, on a $2n + (-1)^n \geq 2n - 1 \geq n$. Notre série est donc alternée et son terme général tend vers 0. Pour qu'elle soit convergente, il suffit que la suite $(|u_n|)_{n \geq 1}$ soit décroissante. C'est le cas puisque

$$\frac{1}{|u_{n+1}|} - \frac{1}{|u_n|} = 2n + 2 + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n = 2(1 + (-1)^{n+1}) \geq 0.$$

La série $\sum u_n$ est convergente.

II

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n \quad , \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^{4n}}{16^n} \quad , \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n^4}}{16^n}.$$

On désignera par a_n le module du terme général de chacune de ces séries, et on posera $|z| = r$.

1) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = r \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n},$$

qui tend vers r/e quand $n \rightarrow +\infty$. Par le critère de d'Alembert, on obtient $R = e$.

2) La série $\sum a_n$ n'est autre que la série géométrique de raison $r^4/16$, qui converge ssi $r < 2$. D'où $R = 2$.

3) Pour $r \leq 1$, on a $a_n \leq 16^{-n}$, terme général d'une série géométrique convergente ; la série $\sum a_n$ est donc convergente. Pour $r > 1$, on a

$$a_n = \exp(n^4(\ln r) - n \ln(16)),$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$; la série $\sum a_n$ est donc divergente. On conclut que $R = 1$.

En marge de cet exercice, il est intéressant d'étudier le comportement de nos séries pour $|z| = R$.

La première série est *divergente* pour $|z| = e$. De l'inégalité $\ln(1+t) \leq t$, pour tout $t > -1$, on déduit en effet $(1 + (1/n))^n \leq e$, et donc $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq 1$. La suite (a_n) étant croissante et strictement positive, elle ne peut tendre vers 0.

La deuxième série est *divergente* pour $|z| = 2$ puisqu'alors $a_n = 1$ pour tout n .

Enfin on a déjà montré que la troisième série est *absolument convergente* pour $|z| = 1$.

III

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

1) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$(M) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ l'est aussi.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on posera $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2) À l'aide d'un théorème du cours, que l'on citera, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

Un théorème du cours nous dit que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

lorsque que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, a étant un réel quelconque ou $\pm\infty$. La convergence normale résulte aussitôt de la majoration (M). Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$, le théorème permet de conclure, d'une part que f est continue sur $\mathbb{R}$, d'autre part que f tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$.

3) a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Notons tout d'abord que

$$f'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}.$$

La fonction f'_n étant impaire, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x)| = \sup_{x \geq 0} |f'_n(x)|$.

Méthode 1 : Posons $g_n(x) = x(n^2 + x^2)^{-2}$. La fonction g_n étant continue sur $[0, +\infty[$, nulle en zéro et à l'infini, elle admet un maximum qu'elle atteint en au moins un $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $g'_n(x_0) = 0$. Puisque $g'_n(x) = (n^2 - 3x^2)(n^2 + x^2)^{-3}$, on a $x_0 = n/\sqrt{3}$, d'où

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x)| = 2g_n\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{8\sqrt{3}} \frac{1}{n^3}.$$

Méthode 2 : Établissons les inégalités

$$\frac{2x}{n^2 + x^2} \leq \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1$$

pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \geq 0$. La première résulte aussitôt de $n^2 + x^2 \geq 1 + x^2$. Pour vérifier la seconde, on observe que

$$(x-1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 \geq 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1.$$

En appliquant nos inégalités à $|x|$, on obtient

$$|f'_n(x)| = \frac{2|x|}{(n^2 + |x|^2)^2} = \frac{1}{n^2 + |x|^2} \frac{2|x|}{n^2 + |x|^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par chacune des méthodes, on arrive à la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad |f'_n(x)| \leq \frac{c}{n^\alpha},$$

où c est une constante positive et $\alpha = 2$ ou 3 . La série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ étant convergente, on obtient la conclusion souhaitée.

b) À l'aide d'un théorème du cours, que l'on citera, montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Un théorème du cours nous dit que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

lorsque

- chaque fonction f_n est de classe C^1 ,
- la série $\sum f_n(x)$ converge pour au moins une valeur de x ,
- la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

La première condition est évidemment vérifiée, la seconde a été établie dans la question 1), et la troisième au a).

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x| \geq \sqrt{m}$. Montrer que

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{x^2(n+1)}.$$

Pour tout $n \leq m$, on a $x^2 \geq n$, d'où $x^2(n+1) = x^2n + x^2 \geq n^2 + x^2$. On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2 + x^2} \geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{x^2(n+1)}.$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = +\infty$.

Soit $A > 0$. Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, il existe $m \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} \geq A.$$

On en déduit que $x^2 f(x) \geq A$ pour tout $|x| \geq \sqrt{m}$. On a donc établi la propriété :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq B \Rightarrow x^2 f(x) \geq A).$$

On peut préciser le résultat ci-dessus en donnant un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Pour ce faire, on part de l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$$

(voir le théorème du cours sur la comparaison entre séries et intégrales impropres). Les intégrales encadrantes se calculent facilement par le changement de variable $t = ux$, à x fixé. On obtient ainsi

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x},$$

d'où il découle que $f(x) \sim (\pi/2) (1/x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

IV

1) Calculer les développements en série entière des fonctions $f(x) = (2+x)^{-1}$ et $g(x) = \ln(2+x)$.

Parmi les DSE usuels, on dispose de

$$(U) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{avec } R = 1).$$

Pour $|x| < 2$, on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

En intégrant terme à terme le développement ci-dessus (sans oublier que $g(0) = \ln 2 \dots$), il vient

$$g(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n} x^n.$$

Dans les deux cas le rayon de convergence est 2.

2) Calculer le développement en série entière de la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

La factorisation $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ nous donne

$$h(x) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x} \right) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

D'après le cours, le rayon de convergence de cette série entière est *au moins égal* à $\min(1, 2) = 1$. En fait il est égal à 1, car on voit facilement que le terme général de la série ne tend pas vers 0 si $x = \pm 1$.

Remarque : dans le cours de MI3, il a été prouvé que le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n)x^n$ est égal au plus petit des rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, lorsque ces rayons de convergence sont distincts. Cette règle générale s'applique ici.

3) Montrer que la fonction $u(x) = \ln(2-x-x^2)$ est définie dans un voisinage de 0 et calculer son développement en série entière.

D'après la factorisation précédente, la fonction u est définie sur l'intervalle $] -2, 1[$, qui est un voisinage de 0. En utilisant

a) la première question,

b) la formule du cours pour $\ln(1-x)$ (qu'on peut retrouver en intégrant terme à terme la formule (U) ci-dessus), on obtient

$$u(x) = \ln(1-x) + \ln(2+x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} - 1 \right) x^n,$$

avec un rayon de convergence égal à 1. Une autre méthode consiste à observer que $u'(x) = (2x+1)h(x)$ et à appliquer la question précédente.