CE SUJET EST DESTINÉ EXCLUSIVEMENT AUX ÉTUDIANTS DE MI3

Examen du 5 janvier

Durée : 3 heures

Barème indicatif : 3, 4, 2, 3, 8.

I

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^6 + x^2}$.

1) Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on posera $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2) À l'aide d'un théorème du cours, que l'on citera, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. *Indication : l'une des méthodes possibles consiste à étudier la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et à en déduire la valeur de $\max_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$.*

II

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad 4xy'' + 2y' - y = 0\,.$$

où y représente une fonction inconnue de la variable x.

1) Soit $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière, supposée converger sur un intervalle $]-R, R[$, avec $R > 0$. Montrer que, si y est une solution de $(\mathcal{E})$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = a_0 \frac{1}{(2n)!}\,.$$

2) Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^n\,.$$

   En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ admet une solution f, développable en série entière en 0 et vérifiant $f(0) = 1$.

3) Calculer $f(x)$ (autrement dit l'exprimer comme une fonction usuelle). *Indication : on commencera par le calcul de $f(\pm t^2)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

III

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

IV

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure (*N.B. : on ne demande pas de calculer* P^{-1}).

V

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -a & 0 & -a \\ a & -2 & a-2 \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

1) Montrer que M est de rang 2, quel que soit a. En déduire que 0 est l'une des valeurs propres de M.

2) Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire *les autres* valeurs propres de M.

3) Montrer que M est diagonalisable, sauf pour $a = -1$.

On suppose désormais que $a = 1$.

4) Calculer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.

5) Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & x(t) & +2y(t) & +3z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) & & -z(t) \\ z'(t) & = & x(t) & -2y(t) & -z(t) \end{array} \right.$$