Corrigé de l'examen de janvier

Exercice 1 Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \frac{nx}{n^6+x^2}$ si $x \in \mathbb{R}_+$.

1) Prouvons que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Sinon, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^6+x^2} = x\frac{n}{n^6}\frac{1}{1+n^{-6}x^2} \sim x\frac{1}{n^5}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} n^{-5}$ converge, il résulte de cet équivalent que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

Commentaire. Une erreur souvent lue consiste à dire que $f_n(x) \sim n^{-5}$ alors que $f_n(x)n^5$ tend vers x et non vers 1.

2) Montrons que la fonction f *telle que* $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) = n\frac{n^6-x^2}{(n^6+x^2)^2}.$$

Il en résulte que $f_n'(x) > 0$ (resp. < 0) si et seulement si $x \in \left]0, n^3\right[$ (resp. $x \in \left]n^3, +\infty\right[$). Ainsi, f_n est strictement croissante sur $\left[0, n^3\right]$ avec $f_n(0) = 0$, strictement décroissante sur $\left[n^3, +\infty\right[$ avec $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. La fonction positive f_n atteint donc son maximum en $x = n^3$ de sorte que

$$m_n = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n(n^3) = \frac{1}{2n^2}.$$

Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}$ converge, il en de même pour $\sum_{n\geqslant 1} m_n$, de sorte que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, chaque fonction f_n étant continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction somme $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$ est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$.

Commentaire. Il y a d'autres méthodes pour arriver au même résultat, moins calculatoires mais un peu plus astucieuses :
On peut considérer la série de fonctions positives $\sum n(n^6+x^2)^{-1}$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, car son terme général est majoré par n^{-5}. Si on note $g(x)$ la somme de cette série, g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f(x) = xg(x)$, d'où la continuité de f, comme produit de fonctions continues.
On peut encore fixer $a > 0$ et observer qu'on a $|f_n(x)| \leqslant an^{-5}$ sur $[0, a]$. On en déduit la convergence normale de la série $\sum f_n$, et donc la continuité de f, sur l'intervalle $[0, a]$. Puisque a est arbitraire, on en déduit que f est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 Notons $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

où y est la fonction-inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1) Soit y une fonction développable en série entière de rayon de convergence non nul. Il existe donc $R > 0$ et une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in \,]-R,+R[\quad y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Alors, y est indéfiniment dérivable sur $]-R,+R[$ et ses dérivées successives sont développables en série entière sur $]-R,+R[$ de sorte que, pour tout $x \in \,]-R,+R[$,

$$\begin{array}{lcl} y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n & \Leftrightarrow & -y(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-a_n)x^n \\ y'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} & \Leftrightarrow & 2y'(x) = \sum_{n\geqslant 0} 2(n+1)a_{n+1}x^n \\ y''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} & \Leftrightarrow & 4xy''(x) = \sum_{n\geqslant 0} 4n(n+1)a_{n+1}x^n \end{array}.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in \,]-R,+R[\qquad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = \sum_{n\geqslant 0} \left(2(2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n\right) x^n. \tag{1}$$

Par le *principe d'identification*, y est donc une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-R, R[$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n. \tag{2}$$

Montrons par récurrrence sur n que $a_n = a_0\left((2n)!\right)^{-1}$.

L'égalité est trivialement vérifiée si $n = 0$. Supposons $n \geqslant 1$ et la formule vraie à l'indice n. Alors,

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{a_0}{(2n)!} = a_0\left((2n+2)!\right)^{-1}.$$

Ceci achève la preuve.

2) *Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} x^n$.*

Notons $c_n = \frac{|x^n|}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{|x|}{(2n+1)(2n+2)}$ tend vers 0, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} x^n$ est $+\infty$.

En déduire l'existence d'une solution f de $(\mathcal{E})$ développable en série entière en 0 telle que $f(0) = 1$.

Notons f la fonction-somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} x^n$ de rayon de convergence infini. f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 en 0. Les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série entière en 0 vérifient : $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc l'équation de récurrence (2), ce qui prouve que f est solution de $(\mathcal{E})$.

3) *Donner une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.*

Supposons que $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, $x = t^2$ où $t = \sqrt{x}$ et $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} = \cosh t = \cosh(\sqrt{x})$.

Supposons que $x \in \mathbb{R}_-^*$. Alors, $x = -t^2$ où $t = \sqrt{|x|}$ et $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n t^{2n} = \cos t = \cos(-\sqrt{|x|})$.

Exercice 3 Considérons la matrice carrée de taille 4 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

B est triangulaire supérieure. Ses coefficients diagonaux $0, 1, 2, 3$ en sont les valeurs propres. Comme B admet quatre valeurs propres distinctes, B est diagonalisable.

Commentaires. 1) Il est aussi fastidieux qu'inutile de calculer les vecteurs propres de B.
2) Dans quelques copies, on lit que "puisque B n'est pas inversible (son déterminant étant nul) B n'est pas diagonalisable". Ce raisonnement est erroné : il existe des matrices diagonalisables qui ne sont pas inversibles (par exemple la matrice nulle !). D'ailleurs il existe aussi des matrices inversibles qui ne sont pas diagonalisables, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Considérons la matrice carrée A de taille 2 telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et notons f l'endomorphisme linéaire dont A est la matrice représentative dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

Le polynôme caractéristique χ_A de A vérifie : $\chi_A(x) = -(1-x)(1+x) + 1 = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. 0 est donc la seule valeur propre de A et l'espace propre associé — à savoir $\operatorname{Ker} f$ — est la droite vectorielle de base $u = e_1 + e_2$. Comme la dimension de l'espace propre $\operatorname{Ker} f$ est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre 0 dans χ_A, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Par définition, $f(e_1) = e_1 + e_2$. Autrement dit, $f(u) = 0$ et $f(e_1) = u$. Comme (u, e_1) forme une base de $\mathbb{R}^2$, on peut définir la matrice représentative A' de f dans la base (u, e_1) qui s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc une matrice carrée inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$: précisément, P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers la base (u, e_1), à savoir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Considérons pour toute valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la matrice carrée $M = M(a)$ de taille 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -a & 0 & -a \\ a & -2 & a-2 \end{pmatrix}.$$

1) Comme les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles (y compris pour $a = 0$), M est au moins de rang 2. De plus, la troisième colonne de M est la somme des deux premières de sorte que le rang de M est strictement inférieur à 3. En conséquence, M est de rang 2. Par le théorème du rang, le noyau de M est une droite vectorielle et 0 est donc une valeur propre de M.

2) Calculons le polynôme caractéristique χ_M de M. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -a & -x & -a \\ a & -2 & a-2-x \end{vmatrix} \underset{L_3:=L_3-L_1-L_2}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 2 & x \\ -a & -x & x \\ a & -2 & -x \end{vmatrix}.$$

En factorisant x dans la dernière colonne, puis en développant suivant la première, il vient

$$\chi_M(x) = x\left((1-x)(x+2) + a(x+2)\right) = x(x+2)(1+a-x)\,.$$

Les valeurs propres de M sont donc : 0, -2 et $a+1$, deux à deux distinctes ssi $a \notin \{-1,-3\}$.

3) **Si $a \notin \{-1,-3\}$, la matrice M possèdant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable.**

Supposons que $a=-1$. D'après la question précédente le sous-espace propre associé à la valeur propre *double* 0 — à savoir le noyau de M — est de *dimension* 1. M n'est donc pas diagonalisable lorsque $a=-1$.

Supposons que $a=-3$. On a alors

$$M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est évidemment de rang 1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre *double* -2 — à savoir le noyau de $M+2I_3$ — est de *dimension* 2. M est donc diagonalisable lorsque $a=-3$.

4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M (on choisit dorénavant $a=1$).

M admet trois valeurs propres distinctes : 0, 2 et -2. Les sous-espaces propres sont donc $\operatorname{Ker} M$, $\operatorname{Ker}(M-2I_3)$ et $\operatorname{Ker}(M+2I_3)$.

Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker} M$ ssi c'est une solution du système

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & =0 \\ -x & & -z & =0 \\ x & -2y & -z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & & =0 \\ x & & +z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = x\,(1,1,-1)\,.$$

Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker}(M-2I_3)$ ssi c'est une solution du système

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +2y & +3z & =0 \\ -x & -2y & -z & =0 \\ x & -2y & -3z & =0 \end{array}\right. \underset{E_2:=-E_1-E_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =0 \\ 2x & & -2z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = x\,(1,-1,1)\,.$$

Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker}(M+2I_3)$ ssi c'est une solution du système

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x & +2y & +3z & =0 \\ -x & +2y & -z & =0 \\ x & -2y & +z & =0 \end{array}\right. \underset{E_1:=E_1-E_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} 4x & & +4z & =0 \\ x & -2y & +z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = x\,(1,0,-1)\,.$$

En conclusion, les trois vecteurs suivants sont des vecteurs propres de M formant une base de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,1,-1)\,, \quad v_2 = (1,-1,1)\,, \quad v_3 = (1,0,-1)\,.$$

5) Résoudre le système différentiel (Σ) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & x(t) & + & 2y(t) & + & 3z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) & & & - & z(t) \\ x'(t) & = & x(t) & - & 2y(t) & - & z(t) \end{array}\right.$.

Une fonction dérivable X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ est solution de (Σ) si seulement si $X'(t) = MX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, et d'après les questions précédentes, la solution générale de (Σ) est donnée par

$$X(t) = \mu_1 e^{0t} v_1 + \mu_2 e^{2t} v_2 + \mu_3 e^{-2t} v_3 ,$$

où μ_1, μ_2 et μ_3 sont des réels arbitraires, ce qui s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{rlll} x(t) = & \mu_1 & +\mu_2 e^{2t} & +\mu_3 e^{-2t} \\ y(t) = & \mu_1 & -\mu_2 e^{2t} & \\ z(t) = & -\mu_1 & +\mu_2 e^{2t} & -\mu_3 e^{-2t} \end{array}\right. .$$

Commentaire. Les questions 1–4 de cet exercice pourraient tenir en une seule :
$(\mathcal{Q})$: *Discuter la diagonalisabilité de la matrice M ; la diagonaliser effectivement, quand c'est possible, sinon la trigonaliser.*
(dans le cadre d'une épreuve en temps limité, on a préféré détailler les questions et limiter la diagonalisation effective à une valeur du paramètre)
Voici une rédaction détaillée pour cette question $(\mathcal{Q})$.
Le calcul du polynôme caractéristique a déjà été fait (voir ci-dessus). Il nous reste à déterminer les sous-espaces propres. Pour ce faire, nous utiliserons les transformations du pivot *sur les lignes*, car elles ont la particularité de conserver le noyau d'une matrice.

On discutera d'abord le cas générique, c'est-à-dire $a \notin \{-1, -3\}$.

Calcul de $\operatorname{Ker} M$. La matrice M se réduit à

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -a & 0 & -a \\ a & -2 & a-2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2:=L_2+aL_1 \\ L_3:=L_3+L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2a & 2a \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2:=-\frac{1}{2}L_3 \\ L_3:=L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2a & -2a \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1:=L_1-2L_2 \\ L_3:=L_3+2aL_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} M$ admet pour système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

et donc que $\operatorname{Ker} M$ est la droite vectorielle ayant pour base le vecteur v_1.

Calcul de $\operatorname{Ker}(M-(a+1)I_3)$. La matrice $M-(a+1)I_3$ se réduit comme suit :

$$\begin{pmatrix} -a & 2 & 3 \\ -a & -a-1 & -a \\ a & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2:=L_2-L_1 \\ L_3:=L_3+L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -a & 2 & 3 \\ 0 & -3-a & -3-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2:=\frac{1}{-a-3}L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -a & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(M-(a+1)I_3)$ admet pour système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -ax & +2y & +3z & =0 \\ & y & +z & =0 \end{array}\right.$$

et donc que $\mathrm{Ker}\,(M-(a+1)I_3)$ est la droite vectorielle ayant pour base le vecteur $u_a=(1,-a,a)$.

Calcul de $\mathrm{Ker}\,(M+2I_3)$. La matrice $M+2I_3$ se réduit à

$$M+2I_3 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -a & 2 & -a \\ a & -2 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2:=L_2+\frac{a}{3}L_1 \\ L_3:=L_3+L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3}(3+a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $a+3\neq 0$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(M+2I_3)$ admet pour système d'équations :

$$\begin{cases} 3x & +2y & +3z & =0 \\ & y & & =0 \end{cases}$$

et donc que $\mathrm{Ker}\,(M+2I_3)$ est la droite vectorielle ayant pour base le vecteur v_3.
Dans le cas générique, on a donc obtenu une base (v_1,u_a,v_3) formée de vecteurs propres de M.

Supposons que $a=-3$.
Dans ce cas -2 est valeur propre double et, compte tenu de la forme réduite de $M+2I_3$ obtenue ci-dessus, on voit que $\mathrm{Ker}(M+2I_3)$ est le plan d'équation $3x+2y+3z=0$. Les vecteurs u_{-3} et v_3 constituent une base de ce plan.
Dans le cas $a=-3$, on a donc obtenu une base (v_1,u_{-3},v_3) formée de vecteurs propres de M.

Supposons que $a=-1$.
On dispose alors de deux sous-espaces propres de dimension 1, à savoir $\mathrm{Ker}\,M$ et $\mathrm{Ker}\,(M+2I_3)$. La matrice M n'est pas diagonalisable. D'après le cours, il est possible de trouver une matrice inversible P telle que

$$(\star)\quad P^{-1}MP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On dispose déjà des première et dernière colonnes de P, à savoir les coordonnées de v_1 et de v_3. Il reste donc à trouver un vecteur v_2' qui vérifie $Mv_2'=v_1$, autrement dit une solution du système

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ x & & +z & =1 \\ -x & -2y & -3z & =-1 \end{cases}.$$

Il y a une infinité de solutions possibles, par exemple $v_2'=(0,-1,1)$. En conclusion la matrice (inversible)

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie la relation $(\star)$.