Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

L2- MI3
2007-2008

Devoir surveillé n° 1 (10 octobre)

Durée : 1h30

Barème : 8, 6, 6

1) **Questions de cours.**

a) Pour chacune des assertions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. Toute suite numérique convergente est bornée.
2. Toute suite numérique bornée est convergente.
3. Toute suite positive tendant vers 0 est décroissante.

b) Énoncer les critères de d'Alembert et de Cauchy pour une série à termes positifs.

c) Énoncer le théorème du cours permettant de comparer une intégrale impropre et une série à termes positifs. En utilisant ce théorème, discuter, suivant le nombre réel α, la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

2) On appellera "suite étalon" toute suite de la forme $\left(kn^\alpha(\ln n)^\beta\right)_{n\geq 2}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Pour chacune des suites suivantes déterminer la suite étalon qui lui est équivalente, quand $n \to +\infty$,

$$\frac{n^3}{(\ln n)^3} - n^2(\ln n)^2 \quad , \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad , \quad \ln(n+1)-\ln n \quad , \quad e^{1/n}$$

3) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(\ln n)}{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$