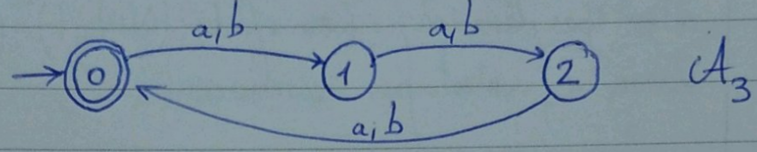
LA3 - Partiel 2018

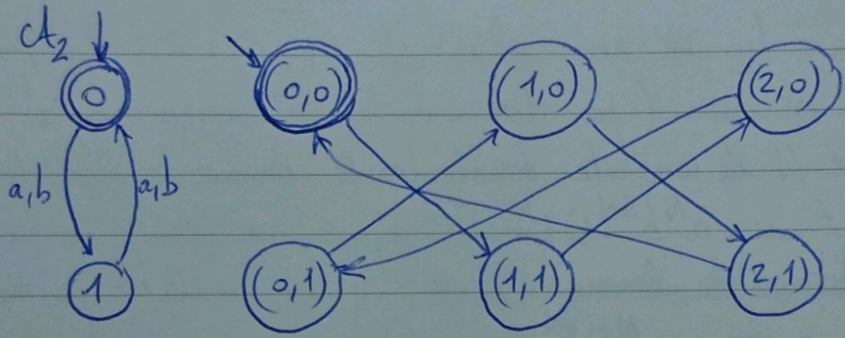
Exercice 1

1. a^5, a^4b, a^2b^2a, a^2b^3, b^2a^3, b^2a^2b, b^4a, b^5

2. ε

Exercice 2





Automate pour L_6 (toutes les transitions sont étiquetées par a, b) !

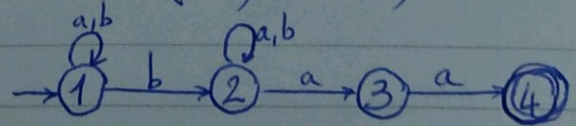
Puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, $L_6 = L_2 \cap L_3$.
On construit donc l'automate produit ~~où les deux états du couple~~ dont les états terminaux sont ceux où les deux états du couple le sont.

Exercice 3

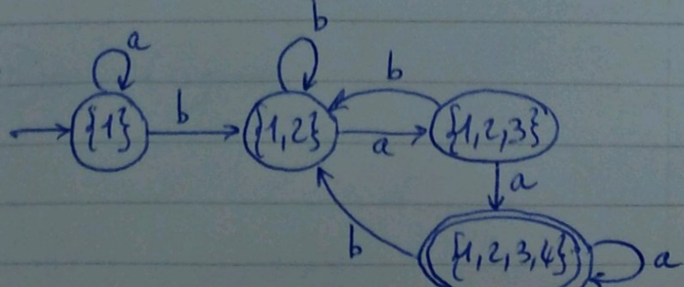
1. $\Rightarrow$: ~~si~~ $u \in L$ alors il contient baa, donc b, et finit par aa.
$\Leftarrow$: si u contient b et se termine par aa, ~~soit~~ on considère la dernière occurrence de b dans u : il n'y a que des a après, et il y en a au moins deux puisque u finit par aa. Donc u contient le facteur baa.

2. On en déduit l'e.r. suivante : $(a+b)^*b\,(a+b)^*aa$

3. et l'AFND suivant :



4. Déterminisation :



Exercice 4

1. Si L_1 était reconnaissable, soit N la constante du lemme d'itération. Soit $u = a^N b^{N^2} \in L_1$. Par le lemme, il existe x, y, z tels que
$$\begin{cases} u = xyz \\ y \neq \varepsilon \\ |xy| \leq N \end{cases} \quad \text{et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad xy^kz \in L_1.$$

Puisque $|xy| \leq N$, le mot y ne contient que des a. Alors $xy^2z = a^{N+|y|}b^{N^2}$ n'est pas dans L_1 (en effet, $(N+|y|)^2 \neq N^2$), contradiction. Donc L_1 n'est pas reconnaissable.

2. Si L_2 est rec, alors $L' = \overline{L_2} \cap \mathcal{L}(a^*b^*) = \{a^n b^m \mid m = 3n\}$ l'est aussi (par clôture de Rec par intersection et complémentaire). Soit N la constante donnée par le lemme de l'étoile pour L'. Soit $u = a^N b^{3N} \in L'$ et x, y, z un découpage vérifiant les conditions du lemme. Alors y est de la forme $y = a^i$ pour $i > 0$ et $xy^2z = a^{N+i}b^{3N} \notin L'$, une contradiction. Donc $L' \notin Rec$, et $L_2 \notin Rec$.

Exercice 5

1. Première étape : linéarisation de $b(aa+b)^*b$. $x_1(x_2x_3+x_4)^*x_5$

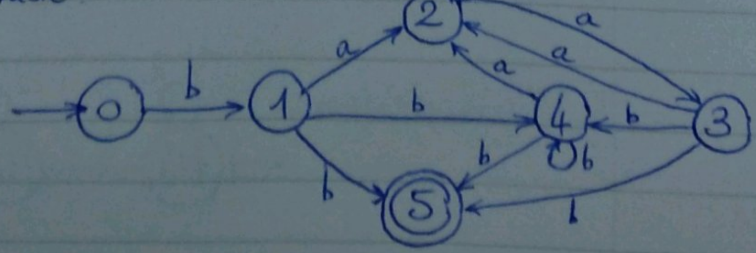
Tableau des successeurs:

0	1
1	2, 4, 5
2	3
3	2, 4, 5
4	2, 4, 5
5	/

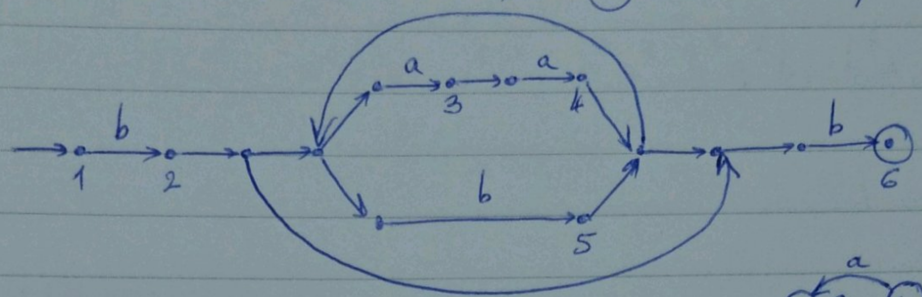
Table de transition:

	a	b
→ 0		1
1	2	4, 5
2	3	
3	2	4, 5
4	2	4, 5
← 5		

Automate non déterministe

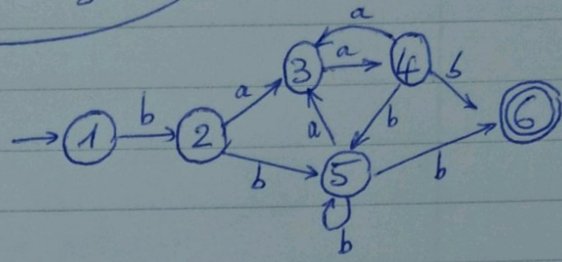


2. AFND à ε-transitions obtenu par l'algorithme de Thompson :

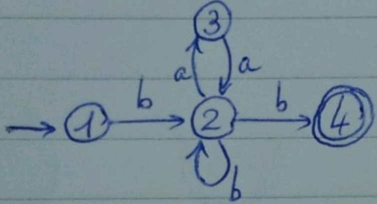


(les transitions non étiquetées sont des ε-transitions)

Suppression des ε-transitions :



3.

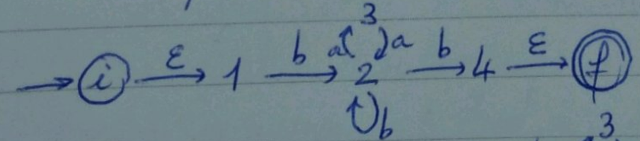


4. Système d'équations
$$\begin{cases} L_1 = b L_2 \\ L_2 = b L_2 + a L_3 + b L_4 \\ L_3 = a L_2 \\ L_4 = \{\varepsilon\} \end{cases}$$

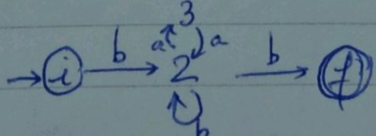
Puisque $\left| \begin{array}{l} L_4 = \{\varepsilon\} \\ L_3 = a L_2 \end{array} \right.$ on obtient $L_2 = b L_2 + aa L_2 + b = (aa+b)^* b$ par le lemme d'Arden.

On en déduit que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L_1 = \mathcal{L}\left(b(aa+b)^* b\right)$

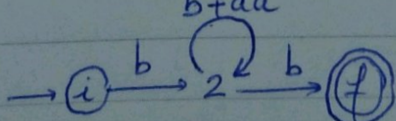
5.



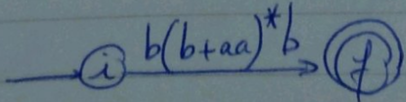
Elimination de 1 et 4 :



Elimination de 3 :



Elimination de 2 :



Donc une e.r. pour $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est $b(aa+b)^* b$.