Les documents ne sont pas autorisés. Le barème est seulement donné à titre indicatif. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : soyez le plus clair et le plus concis possible !

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1 *(3 points)*

Soit $L_1 = \{a^n ba^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Donner une grammaire algébrique pour L_1.
2. Donner un automate à pile (préciser le mode d'acceptation choisi) pour L_1.
3. Démontrer que L_1 n'est pas reconnaissable.

Exercice 2 *(3 points)*

Soit L_2 l'ensemble des mots ayant un nombre pair de a et un nombre impair de b.

1. En calculant les résiduels, trouver un automate minimal pour L_2.
2. Grâce à l'algorithme de Brzozowski-McCluskey, trouver une expression rationnelle pour L_2.

Exercice 3 *(5 points)*

Pour cet exercice, il n'est pas nécessaire de dessiner les automates : donner leur table de transition suffit. Soit L_3 le langage décrit par l'expression rationnelle $e = (a + b)^\star ab(a + b)^\star b$.

1. Grâce à l'algorithme de Glushkov, donner un automate fini non déterministe pour L_3.
2. Déterminiser l'automate obtenu à la question 1.
3. Grâce à l'algorithme de Moore, trouver un automate complet minimal pour L_3 (au préalable, ne pas oublier de compléter l'automate de la question 2 si nécessaire).
4. En appliquant la méthode utilisant le lemme d'Arden, trouver une expression rationnelle pour ${}^cL_3$ (le complémentaire du langage L_3).

Exercice 4 *(4 points)*

Soit L un langage reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. Le but de cet exercice est de montrer que le langage

$$L' = \{vu \mid u, v \in \Sigma^\star \text{ et } uv \in L\}$$

est reconnaissable. Pour tout état $q \in Q$, on note

$$G_q = \{w \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q_0, w) = q\}$$

(en lisant w dans $\mathcal{A}$ à partir de l'état q_0 on arrive dans l'état q) et

$$D_q = \{w \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q, w) \in F\}$$

(en lisant w dans $\mathcal{A}$ à partir de l'état q on arrive dans un état final).

1. Pour tout $q \in Q$, démontrer que G_q et D_q sont reconnaissables.
2. Pour tout $q \in Q$, démontrer que $D_qG_q \subseteq L'$.
3. Démontrer que pour tout $x \in L'$, il existe $q \in Q$ tel que $x \in D_qG_q$.
4. Conclure.

Exercice 5 *(5 points)*

On rappelle l'énoncé du lemme d'itération pour les langages algébriques : si $L \subseteq \Sigma^\star$ est algébrique, alors il existe un entier N tel que pour tout mot $u \in L$ de taille $\geq N$, il existe $x, v, y, w, z \in \Sigma^\star$ tels que

$$\begin{cases} u = xvywz \\ vw \neq \varepsilon \\ |vyw| \leq N \end{cases} \quad \text{et } \forall k \in \mathbb{N},\ xv^k yw^k z \in L.$$

Soit $L = \{uu \mid u \in \Sigma^\star\}$ l'ensemble des mots qui sont des carrés.

1. Démontrer grâce au lemme d'itération que L n'est pas algébrique. On pourra par exemple partir d'un mot de L de la forme $a^N b^N a^N b^N$.

Nous allons maintenant voir que le complémentaire de L, noté $\bar{L}$, est quant à lui algébrique. On propose la grammaire suivante G :

$$S \to A \mid B \mid AB \mid BA$$

$$A \to aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid a$$

$$B \to aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \mid b$$

2. Démontrer que les mots dérivés à partir de A sont tous les mots de longueur impaire ayant la lettre a au milieu.
3. Donner un résultat similaire pour B (sans démonstration).

Soit $v \in \Sigma^\star$ un mot de longueur $2p - 1$ et $w \in \Sigma^\star$ un mot de longueur $2q - 1$ (pour $p, q \geq 1$) tels que $A \to^\star v$ et $B \to^\star w$. On note $x = vw = x_1 \cdots x_{2n}$ de taille $2n = 2p + 2q - 2$.

4. Montrer que $x_p \neq x_{n+p}$.
5. En déduire que x n'est pas un carré.

Soit $y \in \bar{L}$ de taille $2n$. Il existe donc $p \leq n$ tel que $y_p \neq y_{n+p}$.

6. En décomposant y en $y = vw$ avec v de taille $2p - 1$, montrer que y est engendré par G.
7. Conclure.