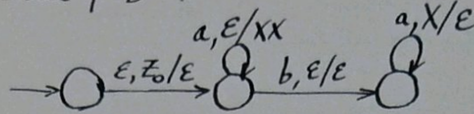
LA3 - Examen 2018

Exercice 1.

1. $S \longrightarrow aSaa \mid b$.

2. Acceptation par pile vide :



3. Si $L_1 \in Rec$, le lemme de l'étoile donne un entier N. On choisit $u = a^N b a^{2N} \in L_1$, $|u| \geq N$. Si $u = xyz$ avec $|xy| \leq N$ et $y \neq \varepsilon$, alors $y = a^i$ pour un certain $i > 0$, et $xy^2z = a^{N+i}ba^{2N} \notin L_1$, contradiction avec le lemme de l'étoile. Donc $L_1 \notin Rec$.

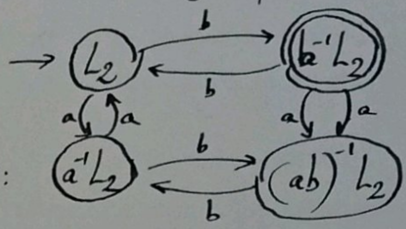
Exercice 2

1. $\varepsilon^{-1}L_2 = L_2$. $\qquad a^{-1}L_2 = \{u \mid |u|_a \text{ impair et } |u|_b \text{ impair}\}$

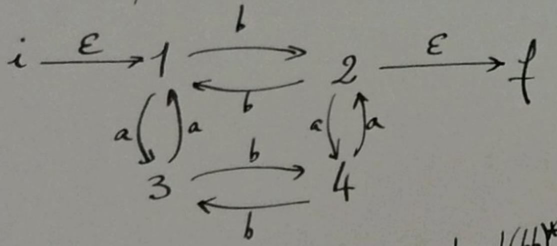
$b^{-1}L_2 = \{u \mid |u|_a \text{ pair et } |u|_b \text{ pair}\}$: $\varepsilon \in b^{-1}L_2$.

$(ab)^{-1}L_2 = (ba)^{-1}L_2 = \{u \mid |u|_a \text{ impair et } |u|_b \text{ pair}\}$. Il n'y a pas d'autres résiduels.

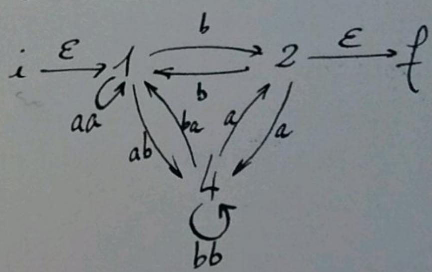
On en déduit l'automate minimal suivant :



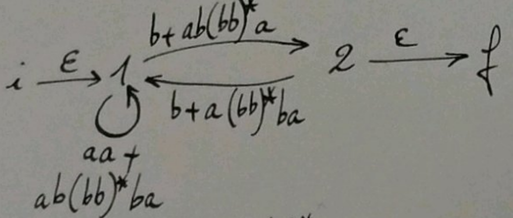
2. On applique l'algorithme de Brzozowski-McCluskey :



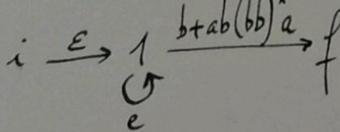
Elimination de 3 :



Elimination de 4 :



Elimination de 2 :



où $e = aa + ab(bb)^*ba + (b + ab(bb)^*a)(b + a(bb)^*ba)$.

On obtient donc l'expression rationnelle $e^*(b + ab(bb)^*a)$ pour L_2.

Exercice 3

1. On linéarise : $(x_1 + x_2)^* x_3 x_4 (x_5 + x_6)^* x_7$. On obtient :

Successeurs :

0	1, 2, 3
1	1, 2, 3
2	1, 2, 3
3	4
4	5, 6, 7
5	5, 6, 7
6	5, 6, 7
7	

Table de transition :

	a	b
→ 0	1, 3	2
1	1, 3	2
2	1, 3	2
3		4
4	5	6, 7
5	5	6, 7
6	5	6, 7
← 7		

2. Déterminisation :

		a	b
→	0	13	2
	13	13	24
	2	13	2
	24	135	267
	135	135	2467
←	267	135	267
←	2467	135	267

On renomme les états :

		a	b
→	0	1	2
	1	1	3
	2	1	2
	3	4	5
	4	4	6
←	5	4	5
←	6	4	5

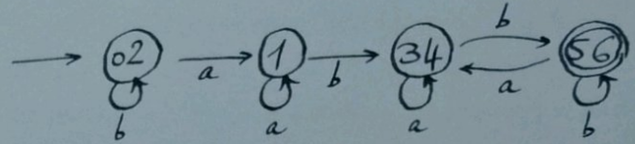
3. L'automate précédent est déterministe et complet, on applique l'algorithme de Moore :

Classes d'équivalence pour $\equiv_0$: $\{0,\dots,4\}$, $\{5,6\}$

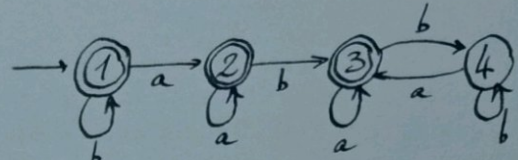
b sépare $\{0,1,2\}$ de $\{3,4\}$, donc $\equiv_1$: $\{0,1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$

b sépare $\{0,2\}$ de 1, donc $\equiv_2$: $\{0,2\}$, $\{1\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$

On obtient l'automate minimal :



4. Automate pour le complémentaire :
(l'automate du 3 étant complet)



On veut une e.r. pour L_1 dans le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} L_1 = bL_1 + aL_2 + \varepsilon \\ L_2 = aL_2 + bL_3 + \varepsilon \\ L_3 = aL_3 + bL_4 + \varepsilon \\ L_4 = bL_4 + aL_3 \end{cases}$$

Le lemme d'Arden donne $L_4 = b^* a L_3$

donc $L_3 = aL_3 + b^+ a L_3 + \varepsilon = (a + b^+ a)^*$

On en déduit $L_2 = aL_2 + b(a+b^+a)^* + \varepsilon = a^*(b(a+b^+a)^* + \varepsilon)$

et $L_1 = bL_1 + a^+(b(a+b^+a)^* + \varepsilon) + \varepsilon = b^*(a^+(b(a+b^+a)^* + \varepsilon) + \varepsilon)$.

Exercice 4

1. G_q est reconnu par la modification de $\mathcal{A}$ où seul q est final.
D_q est reconnu par la modification de $\mathcal{A}$ où l'état initial est q.

2. Si $x \in D_q G_q$ alors $\exists v \in D_q$ et $u \in G_q$ tq $x = vu$. Or $uv \in L$ car $\delta^*(q_0, u) = q$ et $\delta^*(q, v) \in F$.
Donc $x \in L'$.

3. Si $x \in L'$ alors $\exists u, v \in \Sigma^*$ tq $x = vu$ et $uv \in L$. Soit $q \in Q$ tq $\delta^*(q_0, u) = q$: alors $\delta^*(q, v) \in F$, donc $u \in G_q$ et $v \in D_q$, donc $x \in D_q G_q$.

4. Par 2 et 3, $L' = \bigcup_{q \in Q} D_q G_q$. Par 1, D_q et G_q sont reconnaissables. Par clôture de Rec par . et $\cup$, $L' \in Rec$.

Exercice 5   1. Si $L \in Alg$, le lemme d'itération donne un entier N. On choisit $u = a^N b^N a^N b^N$, $u \in L$ et $|u| \geq N$. Si $u = xvywz$ avec $|vyw| \leq N$ et $vw \neq \varepsilon$, alors on distingue plusieurs cas :

- si vyw est dans la première moitié de u, alors $xv^0yw^0z = xyz = a^{N-i}b^{N-j}a^Nb^N$ pour des entiers i et j tels que $i+j>0$, donc $xv^0yw^0z \notin L$.
- idem si vyw est dans la seconde moitié.
- sinon vyw est dans la « zone du milieu » b^Na^N, donc $xv^0yw^0z = a^Nb^{N-i}a^{N-j}b^N$ pour des entiers i et j tels que $i+j>0$, donc $xv^0yw^0z \notin L$

Dans tous les cas, $xv^0yw^0z \notin L$, contradiction : donc $L \notin Alg$.

2. Montrons par récurrence sur $n = |x|$ que $A \xrightarrow{*} x$ ssi x est de longueur impaire et contient a au milieu.

Pour $n=1$: $A \xrightarrow{*} x$ ssi $x = a$, ce qui montre l'hypothèse au rang 1.

Pour $n>1$: $A \xrightarrow{*} x$ ssi $A \longrightarrow x_1 A x_n \xrightarrow{*} x_1 y x_n$ où $y = x_2 \dots x_{n-1}$ et $A \xrightarrow{*} y$

ssi y de longueur impaire avec a au milieu (par hypothèse de récurrence au rang $|y| = n-2$)

ssi x de longueur impaire avec a au milieu.

3. $B \xrightarrow{*} x$ ssi x de longueur impaire avec b au milieu.

4. $x = vw$ avec $|v| = 2p-1$ et $A \xrightarrow{*} v$, donc $v_p = x_p = a$. De même, $w_q = x_{n+p} = b$, donc $x_p \neq x_{n+p}$.

5. Si x était un carré, alors $\forall i \leq n$, $x_i = x_{i+n}$ (car $|x| = 2n$), ce qui n'est pas le cas ici

6. Si $v_p = a$, alors $A \xrightarrow{*} v$ par 2. et w est de longueur impaire avec b au milieu donc $B \xrightarrow{*} w$.

Donc $S \longrightarrow AB \xrightarrow{*} vw = y$.

De même si $v_p = b$: $S \longrightarrow BA \xrightarrow{*} vw = y$.

7. • Soit $y \in \overline{L}$: si $|y|$ impaire alors soit $A \xrightarrow{*} y$ soit $B \xrightarrow{*} y$, donc $S \xrightarrow{*} y$

sinon par 6., $S \xrightarrow{*} y$. Dans tous les cas, y est engendré par G.

• Soit x engendré par G : si $S \to A \xrightarrow{*} x$ ou $S \to B \xrightarrow{*} x$ alors $|x|$ impaire et $x \in \overline{L}$.

Sinon, $S \to AB \xrightarrow{*} x$ ou $S \to BA \xrightarrow{*} x$ et 5 montre que $x \in \overline{L}$.

En conclusion, $\mathcal{L}(G) = \overline{L}$ donc $\overline{L}$ est algébrique.