Les documents ne sont pas autorisés. Le barème est seulement donné à titre indicatif. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : soyez le plus clair et le plus concis possible !

Tous les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1 *(Expressions rationnelles, automates finis et algorithmes, 6 points)*

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$(a + ba)(aa + b)^\star.$$

1. Grâce à l'algorithme de Glushkov, trouver un automate déterministe à 7 états pour L. Donner sa table de transition, où les états sont nommés de 0 à 6, avec 0 l'état initial.
2. Grâce à l'algorithme de Moore, minimiser l'automate précédent (ne pas oublier de le compléter au préalable). On obtient un automate déterministe complet à 4 états.
3. En déduire un automate pour le complémentaire de L.
4. Appliquer l'algorithme de Brzozowski-McCluskey pour en déduire une expression rationnelle pour le complémentaire de L. On commencera par éliminer l'état puits, puis l'état initial de l'automate de départ.
   Indication : vérifier que le résultat trouvé est cohérent.

Exercice 2 *(Grammaires algébriques et automates à pile, 4 points)*

Soit G la grammaire algébrique suivante.

$$S \to bS \mid bSa \mid \varepsilon$$

1. Donner les mots engendrés par G en au plus trois dérivations.
2. Quel est le mot engendré en empruntant i fois la dérivation $S \to bS$ puis j fois la dérivation $S \to bSa$, et en finissant par la dérivation $S \to \varepsilon$? L'ordre des dérivations est-il important ?
3. En déduire que le langage engendré par G est
$$L = \{b^m a^n \mid m \geq n \geq 0\}.$$
4. Donner un automate à pile pour ce langage, avec acceptation par état final.

Exercice 3 *(Classes d'équivalence et lemme de l'étoile, 6 points)*

Soit L le langage

$$L = \{u \in \Sigma^\star \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u|_a = 2^n\}$$

(l'ensemble des mots dont le nombre de a est une puissance de deux).
On rappelle que deux mots u et v sont équivalents, noté $u \sim_L v$, ssi $\forall w \in \Sigma^\star$ $(uw \in L \iff vw \in L)$. On rappelle qu'une classe d'équivalence de la relation $\sim_L$ est un ensemble de la forme $[u]_L = \{v \in \Sigma^\star \mid v \sim_L u\}$ pour un certain mot $u \in \Sigma^\star$.

1. Si $|u|_a < |v|_a$, trouver $w \in \{a\}^\star$ tel que $uw \in L$ et $vw \notin L$.
2. Décrire toutes les classes d'équivalence de la relation $\sim_L$.
3. En déduire que le langage L n'est pas reconnaissable.
4. Retrouver le point précédent en utilisant le lemme de l'étoile.

Exercice 4 *(Langages reconnaissables, 4 points)*

Soit L un langage reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. On définit

$$\max(L) = \{u \in L \mid \forall v \neq \varepsilon, uv \notin L\}$$

(l'ensemble des mots « maximaux » de L : ils ne peuvent être complétés sans sortir de L). Le but de cet exercice est de montrer que $\max(L)$ reste reconnaissable.
Pour $q \in Q$, on note

$$D_q = \{u \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q, u) \in F\}$$

(en lisant u dans $\mathcal{A}$ à partir de q on arrive dans un état final).

1. Soit $q \in F$. Si u est un mot tel que $\delta^\star(q_0, u) = q$, montrer que :

$$u \in \max(L) \text{ ssi } D_q = \{\varepsilon\}.$$

2. La propriété précédente est-elle vraie si $\mathcal{A}$ est non déterministe ?
3. À partir de $\mathcal{A}$, construire un automate fini pour $\max(L)$.