LA3 - Examen 2017

Exercice 1

1. Linéarisation de l'e.r. : $(x_1 + x_2 x_3)(x_4 x_5 + x_6)^*$

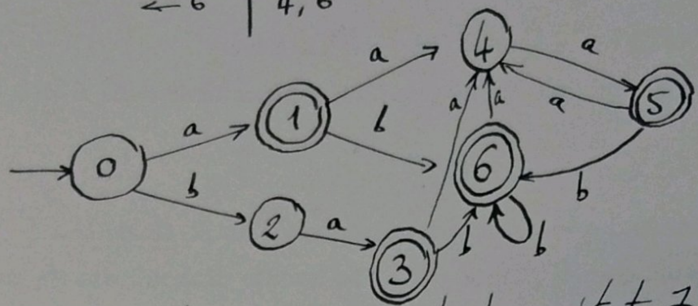
Tableau des successeurs :

$\rightarrow 0$	1, 2
$\leftarrow 1$	4, 6
2	3
$\leftarrow 3$	4, 6
4	5
$\leftarrow 5$	4, 6
$\leftarrow 6$	4, 6

Table de transition :

	a	b
$\rightarrow 0$	1	2
$\leftarrow 1$	4	6
2	3	
$\leftarrow 3$	4	6
4	5	
$\leftarrow 5$	4	6
$\leftarrow 6$	4	6

Automate :



2. On complète l'automate du 1. en ajoutant un état 7 puits.

Moore : . classes d'équivalence pour $\equiv_0$: $\{0,2,4,7\}$ et $\{1,3,5,6\}$
(états non terminaux d'une part, et terminaux d'autre part).

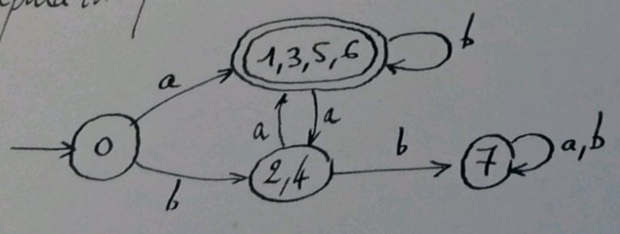
a sépare 0, 2 et 4 de 7

. classes d'équivalence pour $\equiv_1$: $\{0,2,4\}, \{7\}, \{1,3,5,6\}$

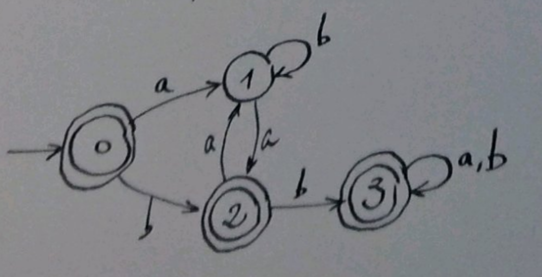
b sépare 0 de 4 et 2

. classes d'équivalence pour $\equiv_2$: $\{0\}, \{2,4\}, \{7\}, \{1,3,5,6\}$

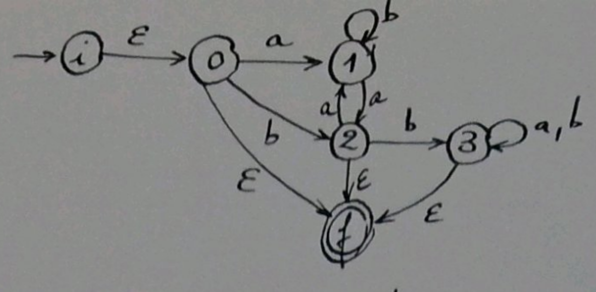
Plus de séparation possible. On obtient l'automate minimal suivant



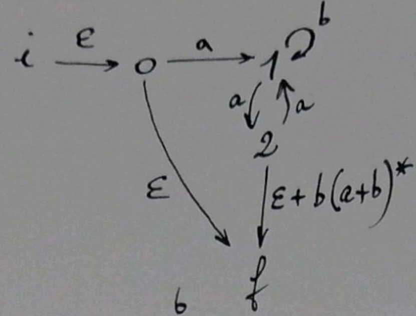
3. L'automate du 2. étant complet, il suffit d'inverser états terminaux et non terminaux.



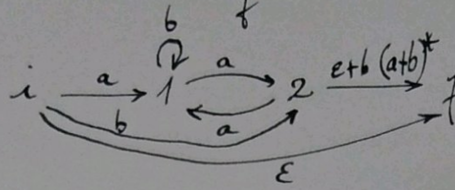
4. Brzozowski-McCluskey :



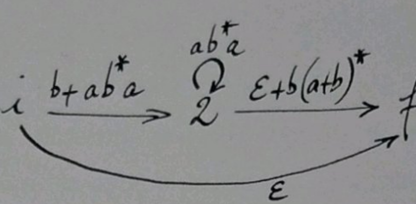
Elimination de l'état 3 :



Elimination de l'état 0 :



Elimination de l'état 1 :



Elimination de l'état 2 :

$$i \xrightarrow{\varepsilon+(b+ab^*a)(ab^*a)^*(\varepsilon+b(a+b)^*)} f$$

Expression rationnelle pour $\mathcal{L}$: $\varepsilon+(b+ab^*a)(ab^*a)^*(\varepsilon+b(a+b)^*)$

Exercice 2

1. En 1 dérivation : ε

En deux dérivations : b et ba En trois dérivations : b^2, b^2a, b^2a^2

Au total en ≤ 3 dérivations : $\{\varepsilon, b, ba, b^2, b^2a, b^2a^2\}$

2 $\underbrace{S \to bS \to \dots \to b^iS}_{i \text{ dérivations}} \underbrace{\to b^{i+1}Sa \to \dots \to b^{i+j}Sa^j \to b^{i+j}a^j}_{j \text{ dérivations } + S\to\varepsilon}$

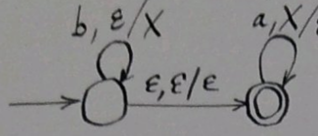
On obtient le mot $b^{i+j}a^j$.

L'ordre des dérivations n'est pas important car les b sont toujours à gauche de S, et les a à droite.

3. Par 2., tout mot engendré par G est de la forme b^ma^n avec $m \geq n$, donc $\mathcal{L}(G) \subseteq L$.

Or tout mot de L, b^ma^n, est engendré par G en $(m-n)$ dérivations $S \to bS$ et n dérivations $S \to bSa$ et en terminant par $S \to \varepsilon$, donc $L \subseteq \mathcal{L}(G)$.

4. A chaque lettre b on empile un symbole X, puis on dépile en lisant a si la pile n'est pas vide



<u>Exercice 3</u> 1. Soit i tq $|v|_a < 2^i$. On prend $w = a^{2^i - |u|_a}$, de sorte que $|uw|_a = 2^i$, donc $uw \in L$. Or $|vw|_a = 2^i - |u|_a + |v|_a > 2^i$ et $|vw|_a \leqslant 2^i + |v|_a < 2^{i+1}$, donc $vw \notin L$.

2. Si $|u|_a = |v|_a$ alors $u \sim_L v$ puisque la condition d'appartenance à L ne porte que sur le nombre de a. De plus, par le 1., si $|u|_a \neq |v|_a$ alors $u \not\sim_L v$. On en déduit que les classes d'équivalence de $\sim_L$ sont les $[a^i]_L$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

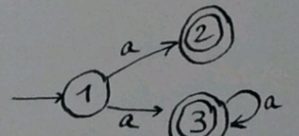
3. Il y a donc une infinité de classes d'équivalence. Par le théorème de Myhill-Nerode, L n'est donc pas reconnaissable.

4. Par l'absurde, si $L \in Rec$, soit N donné par le lemme de l'étoile. On choisit $u = a^{2^N} \in L$, $|u| \geqslant N$. Pour tout découpage $u = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$ et $|y| \leqslant N$, $xy^2z = a^{2^N + |y|}$. Or $2^N < 2^N + |y| < 2^{N+1}$ (puisque $0 < |y| \leqslant N < 2^N$), donc $xy^2z \notin L$, contradiction avec le lemme de l'étoile. Donc $L \notin Rec$.

<u>Exercice 4</u> 1. $\Rightarrow$: si $u \in max(L)$, soit $v \in D_q$. Alors $\delta^*(q_0, uv) = \delta^*(q, v) \in F$, donc $uv \in L$. Or $u \in max(L)$, donc $v = \varepsilon$.

$\Leftarrow$: si $D_q = \{\varepsilon\}$, soit v tel que $uv \in L$: $\delta^*(q_0, uv) = \delta^*(q, v) \in F$, donc $v \in D_q$, donc $v = \varepsilon$ donc $u \in max(L)$.

2. Non : par exemple, dans l'automate



, $2 \in \delta^*(1, a)$ et $D_2 = \{\varepsilon\}$ mais $a \notin max(L)$.

3. Soit $\mathcal{A}'$ l'automate issu de $\mathcal{A}$ où on ne garde terminal que les états $q \in F$ tels que $D_q = \{\varepsilon\}$.
Si $u \in max(L)$, alors $\delta^*(q_0, u) = q \in F$ et $D_q = \{\varepsilon\}$ donc u est accepté par $\mathcal{A}'$.
Si $u \notin max(L)$, alors soit $\delta^*(q_0, u) \notin F$, soit $\delta^*(q_0, u) = q \in F$ et $D_q \neq \{\varepsilon\}$. Dans les deux cas, u n'est pas accepté par $\mathcal{A}'$.
$\mathcal{A}'$ est donc un automate pour $max(L)$.