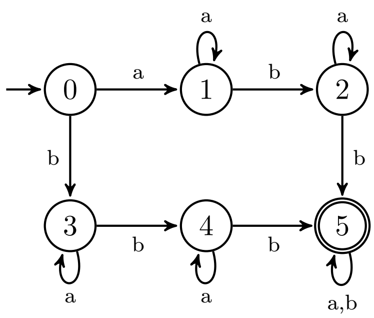
Toutes les réponses doivent être justifiées. La plus grande attention sera accordée à la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et vous êtes libres de les traiter dans l'ordre de votre choix. Le barème est donné à titre indicatif.

Sauf mention du contraire, l'alphabet considéré dans les exercices sera toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1: [2 points] On considère l'automate suivant



Construire l'automate minimal reconnaissant le même langage que cet automate.

Exercice 2: [2 points] Par la méthode de calcul des résiduels, construire l'automate minimal reconnaissant le langage décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$E = (ab + ba)^* ab^*.$$

Exercice 3: [6 points] Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$((ab)^* b + bb)^*.$$

Donner une expression rationnelle reconnaissant l'ensemble des mots qui ne sont pas décrits par cette expression rationnelle.

Exercice 4: [2 points] Proposer un algorithme permettant de résoudre le problème suivant :
Entrée : une expression rationnelle E_1 et une expression rationnelle E_2
Sortie : OUI s'il existe un mot décrit par E_1 qui soit le miroir d'un mot décrit par E_2.

Exercice 5: [4 points] Si u et v sont deux mots, on définit le mélange de u et v comme le langage $mel(u,v)$ obtenu en "intercalant" les lettres de u et v de toutes les façons possibles, c'est-à-dire :

$$mel(u,v) = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_p v_p \mid u_i,\ v_i \text{ sont des } \underline{\text{mots}} \text{ tels que } u = u_1 u_2 \cdots u_p \text{ et } v = v_1 v_2 \cdots v_p\}$$

Par exemple

$$mel(ac, ba) = \{acba, abca, abac, baac, baca\}.$$

Si L et L' sont deux langages, on fait tous les melanges possibles de mots de L et de L' pour définir le mélange de L et L' :

$$mel(L, L') = \bigcup_{u \in L, u' \in L'} mel(u, u').$$

1. Sur l'alphabet $\{a,b,c\}$, on considère le langage L_1 décrit par l'expression a^* et L_2 décrit par l'expression rationnelle $b(bc)^*$. Donner un automate qui reconnait le langage $mel(L_1, L_2)$.
2. Montrer de façon générale que si L et L' sont reconnaissables alors $mel(L, L')$ l'est encore.

   Indication : pour faire cela il suffit de prouver qu'à partir d'un automate reconnaissant L et d'un automate reconnaissant L' on peut construire un automate reconnaissant $mel(L, L')$. On pourra s'inspirer de la construction de l'automate produit.

Exercice 6: [4 points] On rappelle que toute réponse doit être justifiée.

1. On considère la grammaire dont les symboles non terminaux sont T et U, dont le symbole initial est T et dont les règles de production sont :
   $$\begin{cases} T \to aU \mid bU \mid \varepsilon \\ U \to aT \mid bT \end{cases}$$
   Quel est le langage L engendré par cette grammaire ? Est-il rationnel ?
2. On considère maintenant la grammaire dont les symboles non terminaux sont S, T et U, dont le symbole initial est S et dont les règles de production sont :
   $$\begin{cases} S \to aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa \\ T \to aU \mid bU \mid \varepsilon \\ U \to aT \mid bT \end{cases}$$
   Quel est le langage L' engendré par cette grammaire ?
3. Le langage L' est-il rationnel ?