LA3

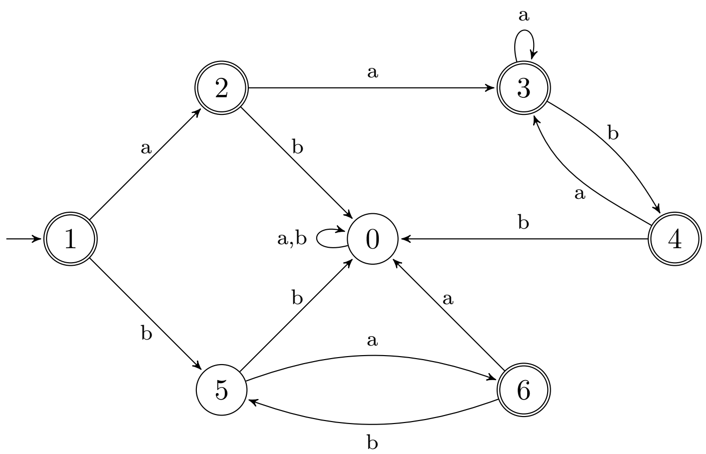
Examen du Mercredi 4 Janvier 2017 - 8h30 à 11h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. La plus grande attention sera accordée à la rédaction.
Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et vous êtes libres de les traiter dans l'ordre de votre choix. Le barème est donné à titre indicatif.
L'alphabet considéré est toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

Il est interdit d'utiliser la couleur rouge pour écrire sur votre copie.

Exercice 1: [4 points] Calculer une expression rationnelle décrivant le langage complémentaire du langage décrit par l'expression rationnelle $a^* + (ba^*b)^*$.

Exercice 2: [2 points] On considère l'automate suivant



Déterminer l'automate minimal reconnaissant le même langage que cet automate.

Exercice 3: [2 points] On considère l'expression rationnelle $E = b(aa)^*ba(bb)^*b$. Par calcul des résidus, trouver l'automate minimal reconnaissant le langage décrit par E.

Exercice 4: [3 points] Déterminer si le langage $L = \{a^n b^{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$ est rationnel. Dans l'affirmative, donner un automate qui reconnaît L, sinon donner une preuve de sa non-rationalité soit par le Lemme d'Itération, soit en utilisant les propriétés de cloture des langages rationnels.

Exercice 5: [5 points] Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe. Pour chaque état q de l'automate, on note $G_q = \{u \in \Sigma^*,\ \delta(q_0, u) = q\}$ et $D_q = \{u \in \Sigma^*,\ \delta(q, u) \in F\}$.

1) Montrer que pour tout état q, les langages G_q et D_q sont rationnels. On pourra proposer des automates, construits à partir de $\mathcal{A}$, qui reconnaissent ces langages.

Si L est un langage, on définit un nouveau langage $\sqrt{L}$ par $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^*,\ uu \in L\}$.

2) Déduire de la question précédente que si L est rationnel alors $\sqrt{L}$ est rationnel.
3) La réciproque (si $\sqrt{L}$ est rationnel alors L est rationnel) est-elle vraie ?

Exercice 6: [4 points]
1) On considère la grammaire G_1 dont les symboles non terminaux sont S, T et U, dont le symbole initial est S et dont les règles de production sont :

$$\begin{cases} S \to Sb \mid Ta \mid \varepsilon \\ T \to Tb \mid Sa \end{cases}$$

Quel est le langage L_1 engendré par cette grammaire ? Est-il rationnel ?

2) On considère maintenant la grammaire G_2 dont les symboles non terminaux sont S et T, dont le symbole initial est S et dont les règles de production sont :

$$\begin{cases} S \to aSb \mid bTa \mid \varepsilon \\ T \to aSb \mid \varepsilon \end{cases}$$

Décrire le langage L_2 engendré par cette grammaire.