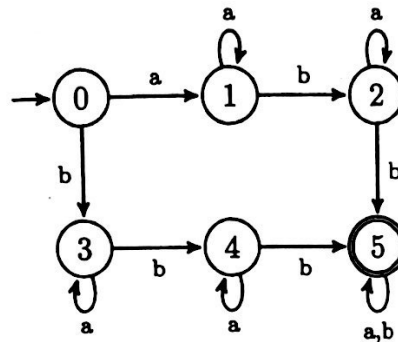


Toutes les réponses doivent être justifiées. La plus grande attention sera accordée à la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et vous êtes libres de les traiter dans l'ordre de votre choix. Le barème est donné à titre indicatif.

Sauf mention du contraire, l'alphabet considéré dans les exercices sera toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1: [2 points] On considère l'automate suivant



Construire l'automate minimal reconnaissant le même langage que cet automate.

Exercice 2: [2 points] Par la méthode de calcul des résiduels, construire l'automate minimal reconnaissant le langage décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$E = (ab + ba)^* ab^*.$$

Exercice 3: [6 points] Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$((ab)^* b + bb)^*.$$

Donner une expression rationnelle reconnaissant l'ensemble des mots qui ne sont pas décrits par cette expression rationnelle.

Exercice 4: [2 points] Proposer un algorithme permettant de résoudre le problème suivant :

Entrée : une expression rationnelle E_1 et une expression rationnelle E_2

Sortie : OUI s'il existe un mot décrit par E_1 qui soit le miroir d'un mot décrit par E_2 .

Exercice 5: [4 points] Si u et v sont deux mots, on définit le mélange de u et v comme le langage $mel(u, v)$ obtenu en "intercalant" les lettres de u et v de toutes les façons possibles, c'est-à-dire :

$$mel(u, v) = \{u_1v_1u_2v_2\cdots u_pv_p \mid u_i, v_i \text{ sont des } \underline{\text{mots}} \text{ tels que } u = u_1u_2\cdots u_p \text{ et } v = v_1v_2\cdots v_p\}$$

Par exemple

$$mel(ac, ba) = \{acba, abca, abac, baac, baca\}.$$

Si L et L' sont deux langages, on fait tous les mélanges possibles de mots de L et de L' pour définir le mélange de L et L' :

$$mel(L, L') = \bigcup_{u \in L, u' \in L'} mel(u, u').$$

1. Sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, on considère le langage L_1 décrit par l'expression a^* et L_2 décrit par l'expression rationnelle $b(bc)^*$. Donner un automate qui reconnaît le langage $mel(L_1, L_2)$.
2. Montrer de façon générale que si L et L' sont reconnaissables alors $mel(L, L')$ l'est encore.

Indication : pour faire cela il suffit de prouver qu'à partir d'un automate reconnaissant L et d'un automate reconnaissant L' on peut construire un automate reconnaissant $mel(L, L')$. On pourra s'inspirer de la construction de l'automate produit.

Exercice 6: [4 points] On rappelle que toute réponse doit être justifiée.

1. On considère la grammaire dont les symboles non terminaux sont T et U , dont le symbole initial est T et dont les règles de production sont :

$$\begin{cases} T \rightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon \\ U \rightarrow aT \mid bT \end{cases}$$

Quel est le langage L engendré par cette grammaire ? Est-il rationnel ?

2. On considère maintenant la grammaire dont les symboles non terminaux sont S , T et U , dont le symbole initial est S et dont les règles de production sont :

$$\begin{cases} S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa \\ T \rightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon \\ U \rightarrow aT \mid bT \end{cases}$$

Quel est le langage L' engendré par cette grammaire ?

3. Le langage L' est-il rationnel ?