Licence 2 Mai 2009
U.V. Automates Finis.
Durée 3 heures Aucun document autorisé.

Avertissement : Les cinq exercices proposés ci-dessous sont indépendants. Le dernier demande un peu de réflexion. Il est conseillé de le traiter en dernier.

1 Union et Intersection

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{1\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	2
1	0	2
2	1	0

Sur le même alphabet A, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{B} =< A, R, \mu, q, \{q\} >$ dont la fonction de transition μ est donnée ci-dessous :

μ	a	b
q	q	r
r	r	q

Construire un automate fini déterministe complet $\mathcal{C}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.
Construire un automate fini déterministe complet $\mathcal{D}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

2 Déterminisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini non déterministe $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{3\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	0,1	0,2
1	1	2
2	2	3
3	0,3	2

Construire un automate déterministe complet $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

3 Minimisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet ayant 6 états, soit $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{3\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	2
1	3	4
2	3	5
3	3	3
4	0	1
5	0	2

Construire l'automate déterministe complet minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

4 Lemme de l'étoile

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage

$$L_1 = \{a^{2n}b^{3n} \mid n \geq 1\}.$$

En utilisant le lemme de l'étoile (version simple), montrer que le langage L_1 n'est pas reconnaissable.
Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage

$$L_2 = \{a^{2n}bv \mid n \geq 1, |v|_b = 3n - 1\}.$$

En utilisant le lemme de l'étoile (version sur les facteurs) , montrer que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.
En utilisant le fait que L_1 n'est pas reconnaissable, montrer directement (sans lemme de l'étoile) que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.

5 L'extraction

On définit une opération unaire sur les mots appelée *extraction* .

Etant donnés un alphabet A et un mot u sur A de longueur paire $2n$, on pose $u = x_1x_2x_3 \ldots x_{2n}$. (Les x_i sont des lettres.) On définit alors le résultat de l'extraction

$$E(u) = x_1x_3 \ldots x_{2n-1}.$$

Le mot $E(u)$ est de longueur moitié de celle de u. Il est obtenu en effaçant les lettres de rang pair dans u. Si le mot u est de longueur impaire, $E(u)$ n'est pas défini.

Question 1 : Calculer $E(u)$ successivement pour $u = ab$, $u = aaab$, $u = aabb$ et $u = abbb$.

Etant donnés un langage L sur A, on définit $E(L)$ comme le langage formé des mots $E(u)$ pour chaque $u \in L$. On notera que si L ne contient aucun mot de longueur paire, le résultat est vide.

Question 2 : Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on se donne le langage $K = a^+b^+$. Donner une expression rationnelle représentant le langage $R = E(K)$. On prendra soin de justifier la réponse proposée.

Etant donné un automate fini déterministe complet $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, q^0, Q' >$, on construit un nouvel automate fini déterministe complet $\mathcal{B}$ de la façon suivante :

l'alphabet d'entrée est A
l'ensemble des états est $Q \times \{i, p\}$
l'état initial est $< q^0, p >$
les états finaux sont $Q' \times \{p\}$
la fonction de transition λ est donnée par
$\lambda(< q, p >, a) =< \delta(q, a), i >$ et $\lambda(< q, i >, a) =< \delta(q, a), p >$.

On notera que lorsque l'automate $\mathcal{B}$ est dans un état de type p, la lecture d'une lettre simule le calcul de $\mathcal{A}$ et fait passer dans un état de type i; symétriquement, si l'automate $\mathcal{B}$ est dans un état de type i, la lecture d'une lettre simule le calcul de $\mathcal{A}$ et fait passer dans un état de type p.

Question 3 : Montrer que si u est un mot de longueur $2n$ reconnu par $\mathcal{A}$, alors le mot u est reconnu par $\mathcal{B}$.

Question 4 : Montrer réciproquement que si un mot h est reconnu par $\mathcal{B}$, alors

(1) h est reconnu par $\mathcal{A}$
(2) h est de longueur paire

Question 5 : En déduire que l'automate $\mathcal{B}$ reconnaît exactement le langage formé des mots de $L(\mathcal{A})$ de longueurs paires.

Question 6: Montrer que si l'on remplace par ϵ les lettres étiquetant les flèches allant d'un état $< q, i >$ vers un état $< r, p >$ dans l'automate $\mathcal{B}$, on obtient un automate généralisé $\mathcal{C}$ reconnaissant $E(L(\mathcal{A}))$.

En déduire que si L est un langage reconnaissable, $E(L)$ l'est aussi.