Licence 2	**Juin 2008**
U.V. Automates Finis.	**Session 2.**
Durée 2 heures 30	Aucun document autorisé.

Avertissement : Les cinq exercices proposés ci-dessous sont indépendants.

1 Union et Intersection

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{0\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	0
1	0	1

Sur le même alphabet A, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{B} =< A, R, \mu, q, \{q\} >$ dont la fonction de transition μ est donnée ci-dessous :

μ	a	b
q	q	r
r	r	q

Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{C}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.
Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{D}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

2 Déterminisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini non déterministe $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{0, 2\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1,3	
1	2	1
2	1	2
3	3	4
4	4	3

Construire un automate déterministe complet $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

3 Minimisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet ayant 6 états, soit $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{0, 2, 4\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	π
1	2	4
2	1	3
3	4	2
4	1	3
π	π	π

Construire l'automate déterministe minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

4 Lemme de l'étoile

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère les trois langages

$$L_1 = \{u \mid |u|_a \ paire\}.$$

$$L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1 \quad et \quad n - m = 2\}.$$

$$L_3 = L_1 \cup L_2.$$

a) En utilisant le lemme de l'étoile (version simple), montrer que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.

b) Donner un automate fini reconnaissant L_1. On prendra soin de prouver que l'automate proposé reconnaît bien le langage L_1.

c) En utilisant une intersection avec le complémentaire de L_1, montrer que L_3 n'est pas reconnaissable.

5 Langages et Expressions rationnelles

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage
$L = \{u \mid u \text{ contient le facteur } ab\}$.

a) Donner tous les mots de L de longueurs 0, 1, 2 et 3.

b) Construire un automate fini reconnaissant le langage L. A nouveau, on prendra soin de prouver que l'automate proposé reconnaît bien le langage L.

c) En utilisant le système d'équations associé à l'automate, donner une expression rationnelle représentant le langage L.