Licence 2 **Mai 2008**
U.V. Automates Finis.
Durée 3 heures Aucuns documents autorisé.

Avertissement : Les cinq exercices proposés ci-dessous sont indépendants. Le dernier demande un peu de réflexion. Il est conseillé de le traiter en dernier.

1 Union et Intersection

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{2\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	0
1	1	2
2	2	2

Sur le même alphabet A, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{B} =< A, R, \mu, q, \{r\} >$ dont la fonction de transition μ est donnée ci-dessous :

μ	a	b
q	q	r
r	q	r

Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{C}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.
Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{D}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.
Minimiser successivement les automates $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

2 Déterminisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini non déterministe $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{3\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	2
1	1,2	3
2	2	3
3	1,3	2

Construire un automate déterministe complet $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

3 Minimisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet ayant 9 états, soit $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{6, 7\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	2
1	3	1
2	4	2
3	6	7
4	5	4
5	6	7
6	6	π
7	7	π
π	π	π

Construire l'automate déterministe complet minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

4 Lemme de l'étoile

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage

$$L_1 = \{a^n b^m a^p \mid n, m, p \geq 1 \quad et \quad m = n + p\}.$$

En utilisant le lemme de l'étoile (version simple), montrer que le langage L_1 n'est pas reconnaissable.
Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage

$$L_2 = \{a^n bv \mid n \geq 1, |v|_a \geq 1, |v|_b \geq 0 \quad et \quad n + |v|_a = 1 + |v|_b\}.$$

En utilisant le lemme de l'étoile (version sur les facteurs) , montrer que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.
En utilisant le fait que L_1 n'est pas reconnaissable, montrer directement (sans lemme de l'étoile) que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.

5 Le mélange littéral

On définit une opération binaire sur les mots appelée *mélange littéral* . Cette opération est voisine de l'opération de mélange étudiée dans le projet, mais elle est beaucoup plus restrictive.

Etant donnés un alphabet A et deux mots u et v sur A de mêmes longueurs k, on pose $u = x_0 x_1 \dots x_{k-1}$ et $v = y_0 y_1 \dots y_{k-1}$. (Les x_i et y_j sont des lettres.) On définit alors le mélange littéral des deux mots par

$$u \wedge v = x_0 y_0 x_1 y_1 \dots x_{k-1} y_{k-1}.$$

Si les deux mots ne sont pas de mêmes longueurs, l'opération n'est pas définie .

Question 1 : Calculer $ab \wedge ab$.
Calculer $abb \wedge abb$, puis $abb \wedge aab$ et $aab \wedge abb$.

Etant donnés deux langages L et M sur A, on définit $L \wedge M$ comme le langage formé des mots $u \wedge v$ pour chaque $u \in L$ et chaque $v \in M$. On notera que si L et M n'ont pas de mots de mêmes longueurs, le résultat est vide.
Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on se donne le langage $K = a^\star b^\star$.

Question 2 : Donner une expression rationnelle représentant le langage $R = K \wedge K$. On prendra soin de justifier la réponse proposée.

Etant donnés deux automates finis déterministes complets $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, q^0, Q' >$ et $\mathcal{B} =< A, R, \mu, r^0, R' >$, on construit un nouvel automate fini déterministe complet $\mathcal{C}$ de la façon suivante :
l'alphabet d'entrée est A
l'ensemble des états est $Q \times R \times \{i, p\}$
l'état initial est $< q^0, r^0, p >$
les états finaux sont $Q' \times R' \times \{p\}$
la fonction de transition λ est donnée par
$\lambda(< q, r, p >, a) =< \delta(q, a), r, i >$ et $\lambda(< q, r, i >, a) =< q, \mu(r, a), p >$.
On notera que lorsque l'automate $\mathcal{C}$ est dans un état de type p, la lecture d'une lettre simule le calcul de $\mathcal{A}$ et fait passer dans un état de type i; symétriquement, si l'automate $\mathcal{C}$ est dans un état de type i, la lecture d'une lettre simule le calcul de $\mathcal{B}$ et fait passer dans un état de type p.

Question 3 : Montrer que si u est un mot de longueur k reconnu par $\mathcal{A}$ et si v est un mot de longueur k reconnu par $\mathcal{B}$, alors le mot $u \wedge v$ est reconnu par $\mathcal{C}$.

Question 4 : Montrer réciproquement que si un mot h est reconnu par $\mathcal{C}$, alors il existe deux mots u et v tels que
(1) $h = u \wedge v$
(2) u est reconnu par $\mathcal{A}$ et v est reconnu par $\mathcal{B}$

Question 5 : En déduire que l'automate $\mathcal{C}$ reconnaît exactement le langage $L(\mathcal{A}) \wedge L(\mathcal{B})$.
Conclure que si L et M sont deux langages reconnaissables sur l'alphabet A, alors le langage $L \wedge M$ est aussi reconnaissable.