Université Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates finis
AF4

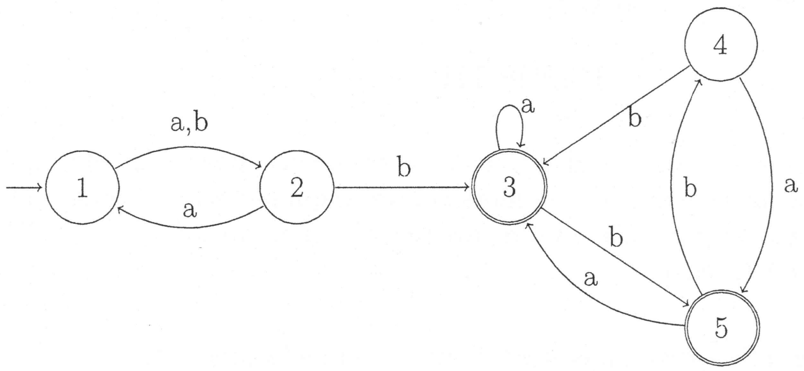
Examen du 23 juin 2014
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Nota : Ce problème est présenté sous la forme de 3 parties ; il est attendu que les étudiants traitent la première partie et soit la partie II, soit les questions 10 et 11 de la partie III (les questions 12 et 13 sont des questions bonus). De plus, de nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.

Problème :

Partie I

On considère dans ce problème l'automate fini $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{1\}, F >$:



Soit L le langage reconnu par cet automate ; on note M_i le langage reconnu par $\mathcal{A}_i =< A, Q, \delta, \{1\}, \{i\} >$

Question 1 : Calculer par la méthode de Mac Naughton et Yamada une expression rationnelle de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Question 2 : Démontrer que cet automate $\mathcal{A}$ est minimal.

Question 3 : Calculer avec soin tous les résiduels de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Question 4 : On considère le langage $K = (ba)^*(ab)^*$. En utilisant la méthode de Glushkov, donner un automate fini qui reconnaît ce langage K, puis déterminiser cet automate.

Question 5 : Déterminer, pour chaque état i de l'automate $\mathcal{A}$ reconnaissant L, si $K \cap M_i$ est vide ou non, et donner l'ensemble D des états de $\mathcal{A}$ pour lesquels cette intersection n'est pas vide.

Question 6 : On considère l'automate $\mathcal{A}_{\setminus K} =< A, Q, \delta, D, F >$. Montrer que le langage reconnu par cet automate vaut $\{w \in A^* \mid \exists f \in K : fw \in L\}$. En donner une expression rationnelle.

Question 7 : De manière générale, montrer, en s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas particulier ci-dessus, que si K et L sont deux langages reconnaissables quelconques, il en est de même du langage $K^{-1}.L = \{g \in A^* \mid \exists f \in K : fg \in L\}$.

Partie II

Si K est un langage rationnel quelconque sur l'alphabet A, on définit un alphabet $\bar{A}$ disjoint de A en bijection avec celui-ci, et soit σ la bijection de A dans $\bar{A}$, que l'on étend en un homomorphisme $\sigma : A^* \to \bar{A}^*$, et l'on note $\bar{K} = \sigma(K)$. Soit $Z = A \cup \bar{A}$, φ et ψ les deux homomorphismes de Z^* dans A^* définis par : $\forall x \in A, \varphi(x) = \psi(x) = x$ et $\forall x \in \bar{A}, \varphi(x) = \sigma^{-1}(x)$ et $\psi(x) = 1$. Soit enfin le langage rationnel $R = \bar{K}.A^*$ sur Z, et on appelle T la transduction rationnelle caractérisée par R, φ et ψ.

Question 8 : Construire un transducteur fini qui réalise la transduction T.

Question 9 : Quelle est l'image $T(L)$ d'un langage L par la transduction rationnelle T vue comme une application. En déduire que si K et L sont deux langages reconnaissables quelconques, il en est de même du langage $K^{-1}.L$.

Partie III

Question 10 : Revenant à l'exemple d'automate $\mathcal{A}$ du début, pour tout état i de cet automate, on considère le langage noté C_i des mots non vides qui partant de l'état i amènent à ce même état i, sans repasser par i, c'est-à-dire, avec les notations du cours : $C_i = {}_iW_i^{Q\setminus\{i\}}$.
Montrer que C_i est un code préfixe(1).
Calculer chacun des C_i.

Question 11 : Montrer qu'il existe un état i tel que C_i vérifie la propriété :
(*) $\forall w \in A^* \setminus C_i, C_i \bigcup \{w\}$ n'est pas un ensemble préfixe.

Question 12 : Montrer qu'il en est de même dans le cas général si l'on se donne n'importe quel automate fini déterministe et complet.

Question 13 : (*nettement plus difficile*) Montrer dans le cas général qu'il existe un état i tel que C_i vérifie la propriété :
(**) $\forall w \in A^* \setminus C_i, C_i \bigcup \{w\}$ n'est pas un code(2).

(1) *On rappelle qu'un ensemble P est préfixe si $[u \in P$ et $uv \in P] \Longrightarrow v = 1$, et que tout ensemble préfixe est un code.*
(2) *On rappelle qu'un ensemble C est un code si tout mot de C^* admet une unique factorisation en éléments de C.*