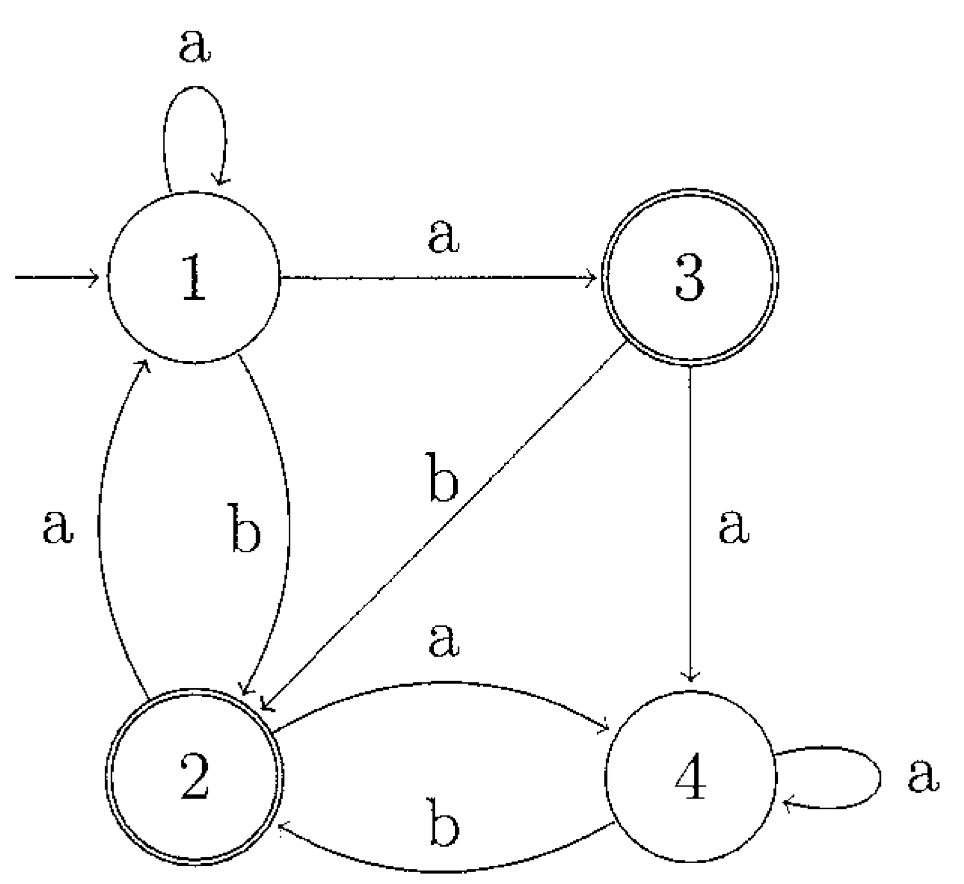
Université Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates finis
AF4

Examen du 13 mai 2013
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 :



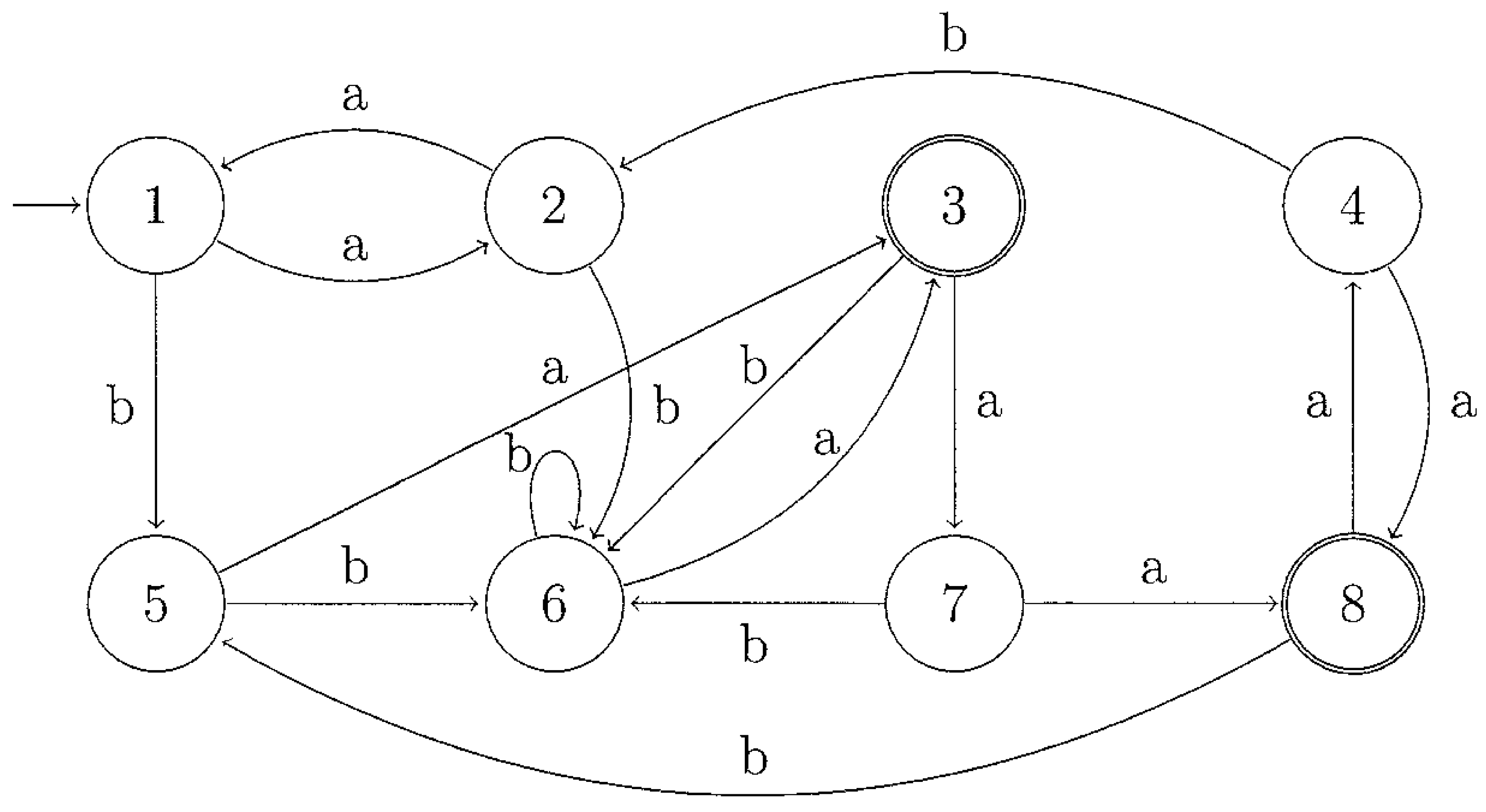
On considère l'automate fini :

Question 1 : Déterminiser cet automate.

Question 2 : Si L le est le langage reconnu par cet automate, calculer par la méthode de Mac Naughton et Yamada une expression rationnelle de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Exercice 2 :

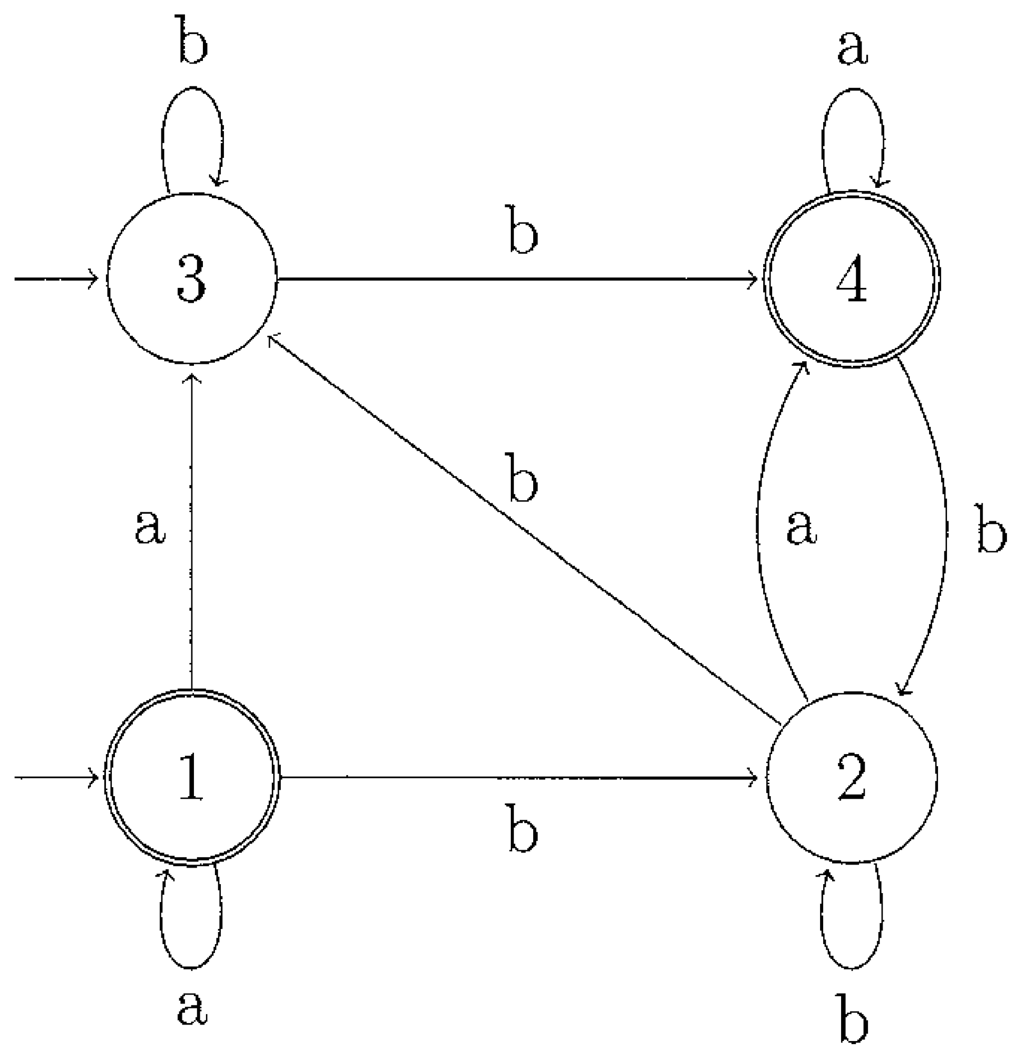
On considère l'automate fini :



Question : Calculer l'équivalence de Nérode associée à cet automate. En déduire l'automate minimal qui reconnaît le même langage.

Exercice 3 :

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on définit l'automate fini $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, D, F >$ ayant pour représentation sagittale :



et soit L le langage reconnu par cet automate.

Question 1 : Construire le système $\mathcal{S}$ d'équations linéaires droites correspondant.

Question 2 : Résoudre ce système $\mathcal{S}$, et en déduire une expression rationnelle de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Exercice 4 :

On considère l'expression rationnelle : $(bb)^*(ab + ba)^*(aa)^*$

Question : En utilisant au choix l'algorithme de Glushkov ou la méthode de Thompson, donner un automate fini qui reconnaît le langage décrit par cette expression rationnelle.

Exercice 5 :

On considère sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ le langage $L = a^*(ab)^*b^*$.

Question 1 : Calculer avec soin tous les résiduels de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Question 2 : En déduire l'automate minimal $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{1\}, F >$ reconnaissant L, où $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 6 :

Soit l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$. Montrer que le langage $L = \{a^n b^p c^q d^r \mid n = q \text{ ou } p \neq r\}$ n'est pas reconnaissable.

Exercice 7 :

Donner un algorithme qui résout le problème :

Donnée : un automate fini $\mathcal{A}$
Question : le langage L reconnu par $\mathcal{A}$ est-il infini ?

L'utiliser pour donner un algorithme qui résout le problème :

Donnée : Une expression rationnelle E et un entier k
Question : le langage L décrit par E contient-il exactement k mots ?

Exercice 8 : (points bonus)

Sur un alphabet A, si L est un langage quelconque, on définit le langage :

$$L/2 = \{f \in A^* \mid \exists g \in A^* : |g| = |f| \text{ et } fg \in L\}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $L \in Rec(A^*) \Longrightarrow L/2 \in Rec(A^*)$.

On utilisera le morphisme $\varphi : A^* \longrightarrow I\!N$ qui définit la longueur : $\forall x \in A, \varphi(x) = 1$, et donc $\forall w \in A^*, \varphi(w) = |w|$.

Question 1 : Vérifier que, pour tout langage K, $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = \{w \in A^* \mid \exists g \in K, |g| = |w|\}$.

Question 2 : Vérifier que, si $K \in Rec(A^*)$, alors $\varphi^{-1}(\varphi(K)) \in Rec(A^*)$.

Pour montrer notre proposition, on considère un automate fini déterministe $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{d\}, F >$ qui reconnaît L, et on définit pour tout état $q \in Q$ les langages M_q et L_q reconnus respectivement par les automates $\mathcal{A}_q =< A, Q, \delta, \{d\}, \{q\} >$ et ${}_q\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{q\}, F >$.

Question 3 : Vérifier que $L = \Sigma_{q \in Q} M_q.L_q$.

Question 4 : Montrer que $L/2 = \Sigma_{q \in Q} M_q \cap \varphi^{-1}(\varphi(L_q))$, et en déduire le résultat.

Question 5 : Que vaut $L/2$ si $L = (ab)^+(cdd)^+$?

Exercice 9 : (suite de l'exercice 5) (points bonus)

Question 3 : Calculer le monoïde de transitions T de cet automate. *(rappel : le monoïde de transitions d'un automate est le plus petit monoïde qui contient les applications $\overline{x}$ de Q dans Q définies pour chaque lettre $x \in A$ par : $\forall q \in Q, \bar{x}(q) = \delta(q, x)$.* (On sera soigneux, car ces applications sont au nombre de 15, soit relativement nombreuses).

Question 4 : Donner les ensembles $H = \{\nu \in T \mid \nu(1) \in F\}$ et $G = \{\nu \in T \mid \nu(2) \in F\}$.

On rappelle que si $\varphi : A^* \to T$ est l'homorphisme défini par $\varphi(f) = \bar{f}$, (où $\overline{u.v} = \bar{u}.\bar{v} = \bar{v} \circ \bar{u}$) alors $L = \varphi^{-1}(H)$.

Question 5 : Vérifier que G est reconnaissable. Que vaut-il ?