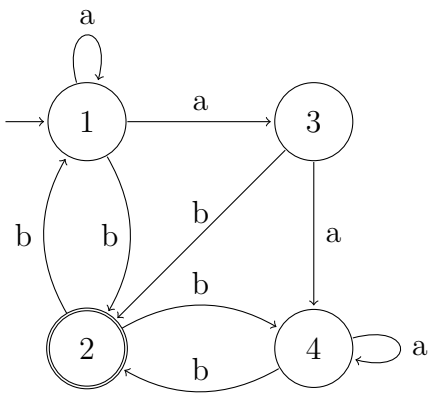
Université Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates finis
AF4

Examen du 21 mai 2012
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On considère l'automate fini :

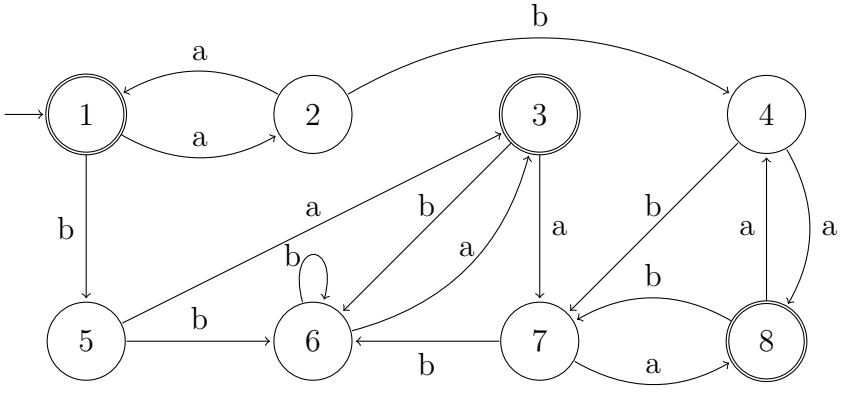


Question 1 : Déterminiser cet automate.

Question 2 : Si L le est le langage reconnu par cet automate, calculer par la méthode de Mac Naughton et Yamada une expression rationnelle de L.

Exercice 2

On considère l'automate fini :



Question : Calculer l'équivalence de Nérode associée à cet automate. En déduire l'automate minimal qui reconnaît le même langage.

Exercice 3

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. Montrer que le langage $L = \{(a^n b)^n \mid n \in I\!N\}$ n'est pas reconnaissable.

Exercice 4

Si $L \subset A^*$, on note $L_{<n>} = L \cap A^n = \{w \in L \mid |w| = n\}$, et $\Theta(L) = \{n \in I\!N \mid L_{<n>} \neq \emptyset\}$. On dira que L est complet (pour les longueurs) si $\Theta(L) = I\!N$, et qu'il est presque complet si $\Theta(L)$ et $I\!N$ ne diffèrent que par un nombre fini d'entiers.

Question 1 : Sur l'alphabet $B = \{a\}$, soit le langage $K = a^3(a^2)^* + a^2(a^3)^*$. Donner la représentation sagittale (*i.e.* le dessin du graphe) d'un automate fini déterministe qui reconnaît K.

Question 2 : Calculer $\Theta(K)$. K est-il complet ? est-il presque complet ?

Question 3 : Montrer que si $H \in Rat(B^*)$, alors soit il est fini, soit il existe un entier $i \geq 0$ et un entier $k > 0$ tels que $H = F \cup \bigcup_{j \in J} a^i (a^k)^* a^j$ où F est un ensemble fini de mots tel que $f \in F \Longrightarrow |f| < i$ et J est un ensemble (fini) d'entiers inclus dans $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Aide : on pourra s'inspirer de l'exemple de la question 1, et donner la forme générale d'un automate fini déterministe qui reconnaît un langage rationnel sur un alphabet à une lettre, pour en déduire la réponse à la question.

Question 4 : Donner un algorithme qui résout le problème :
Donnée : Une expression rationnelle d'un langage $K \in Rat(B^*)$
Question : k est-il complet ?
et un algorithme qui résout le problème :
Donnée : Une expression rationnelle d'un langage $K \in Rat(B^*)$
Question : k est-il presque complet ?

Question 5 : Donner un algorithme qui résout le problème :
Donnée : Deux expressions rationnelles sur l'alphabet B représentant deux langages H_1 et H_2
Question : A-t-on $\Theta(H_1) = \Theta(H_2)$?
et un algorithme qui résout le problème :
Donnée : Deux expressions rationnelles sur l'alphabet B représentant deux langages H_1 et H_2
Question : $\Theta(H_1)$ et $\Theta(H_2)$ diffèrent-ils d'un nombre fini d'entiers ?

Question 6 : Soit A un alphabet quelconque. On considère le morphisme de monoïdes $\pi : A^* \to B^*$ défini par : $\forall x \in A, \pi(x) = a$. Vérifier que $L \in Rat(A^*) \Longrightarrow \pi(L) \in Rat(B^*)$, et montrer que $n \in \Theta(L) \Longleftrightarrow n \in \Theta(\pi(L))$. En déduire des algorithmes qui résolvent les problèmes :
Donnée : Deux expressions rationnelles sur un alphabet A représentant deux langages K_1 et K_2
Question : A-t-on $\Theta(K_1) = \Theta(K_2)$?
et
Donnée : Deux expressions rationnelles sur un alphabet A représentant deux langages K_1 et K_2
Question : $\Theta(K_1)$ et $\Theta(K_2)$ diffèrent-ils d'un nombre fini d'entiers ?

Exercice 5

On considère sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ le langage $M = (aa + bb) + (ab + ba).(aa + bb)^*(ab + ba)$ et le langage $L = (aa + bb)^*(ab + ba).M^*$.

Question 1 : Calculer les résiduels de L (les exprimer en fonction de L et M).

Question 2 : En déduire l'automate minimal $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{1\}, F >$ reconnaissant L, où $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Question 3 : Calculer le monoïde de transitions T de cet automate. *(rappel : le monoïde de transitions d'un automate est le pus petit monoïde qui contient les applications $\overline{x}$ de Q dans Q définies pour chaque lettre $x \in A$ par : $\forall q \in Q, \bar{x}(q) = \delta(q, x)$.*

Question 4 : Soit $H = \{\nu \in T \mid \nu(1) \in F\}$ et soit $G = \{\tau \in T \mid \tau \circ \tau \circ \tau(1) \in F\}$. Que valent H et G ?

On rappelle que si $\varphi : A^* \to T$ est l'homorphisme défini par $\varphi(f) = \bar{f}$, (où $\overline{u.v} = \bar{u}.\bar{v} = \bar{v} \circ \bar{u}$) alors $L = \varphi^{-1}(H)$.

Question 5 : Vérifier que $\varphi^{-1}(G) = \{w \in A^* \mid w^3 \in L\}$, et en déduire que le langage $\mathcal{T}(L) = \{w \in A^* \mid w^3 \in L\}$ est reconnaissable.