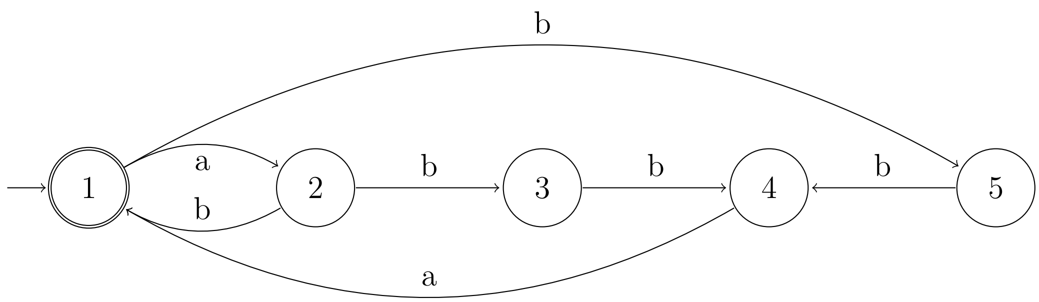
Université Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates finis

Examen du 17 mai 2010
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de justifier ses réponses. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Exercice 1

On considère l'automate fini :



Question 1 : Déterminiser cet automate.

Question 2 : Calculer l'équivalence de Nérode pour l'automate obtenu. En déduire l'automate minimal qui reconnaît le même langage.

Question 3 : Quel est le langage reconnu par cet automate ? (On dira d'abord quelle méthode on utilise, et on explicitera les calculs).

Exercice 2

On considère sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ l'expression rationnelle :

$$(ab)^*c(ab)^* \cup ab(c)^*((a)^*(b)^*)^*$$

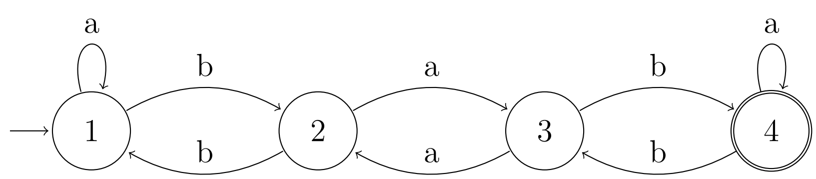
Question 1 : En appliquant l'algorithme de votre choix, construire un automate fini qui reconnaît le langage L décrit par cette expression.

Question 2 : Calculer tous les résiduels du langage L. En déduire l'automate minimal qui reconnaît L.

Problème

Dans ce problème, on ne considère que des automates finis déterministes et complets. On rappelle que si $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{d\}, F >$ est un tel automate, on associe à tout mot $w \in A^*$ une application $\bar{w} : Q \longrightarrow Q$ définie par $\forall q \in Q, \bar{w}(q) = \delta(q, w)$, et que le monoïde de transitions de l'automate est l'ensemble de ces applications muni du produit : $\forall u, v \in A^*, \bar{u}.\bar{v} = \bar{v} \circ \bar{u}$ (où $\circ$ est la composition).

Question 1 : On considère l'automate fini :



Expliciter $\bar{a}$ et $\bar{b}$, et vérifier que ce sont deux permutations.
Nota : on rappelle qu'une permutation est une application d'un ensemble dans lui-même qui est une bijection.

Question 2 : Calculer le monoïde de transitions de cet automate.

Question 3 : Donner la table de multiplication de ce monoïde.

Question 4 : Démontrer dans le cas général que :

$$\forall w \in A^*,\ \bar{w} \text{ est une permutation} \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \bar{x} \text{ est une permutation}$$

Dans la suite, on appellera automate *permutationnel* un automate fini (déterministe et complet) pour lequel toutes les applications de son monoïde de transitions sont des permutations.

Question 5 : Montrer que $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{d\}, F >$ est un automate permutationnel si et seulement $\forall p, q \in Q, \forall x \in A : \delta(q, x) = \delta(p, x) \Longrightarrow p = q$.

Question 6 : Démontrer sans calculs que si $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, \{d\}, \{f\} >$ est un automate permutationnel ayant un unique état d'acceptation f, $\mathcal{A}$ est minimal.

On appellera p-reconnaissable un langage reconnu par un automate permutationnel.

Question 7 : Démontrer que si un langage p-reconnaissable est non vide, il est infini.

Question 8 : L'intersection de deux langages p-reconnaissables est-elle p-reconnaissable ? Qu'en est-il de leur union ?

Question 9 : Soit $L = \{a^{3n+2} | n \geq 0\}$ sur l'alphabet $A = \{a\}$. Montrer que L est p-reconnaissable, mais que ni $L.L$, ni L^* ne le sont.