Licence 2 — **Juin 2009**
U.V. Automates Finis. — **Session 2.**
Durée 2 heures 30 — Aucun document autorisé.

Avertissement : Les cinq exercices proposés ci-dessous sont indépendants.

1 Union et Intersection

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{1\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	1	0
1	0	1

Sur le même alphabet A, on considère l'automate fini déterministe complet $\mathcal{B} =< A, R, \mu, q, \{q\} >$ dont la fonction de transition μ est donnée ci-dessous :

μ	a	b
q	q	r
r	r	s
s	s	q

Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{C}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.
Construire l'automate fini déterministe complet $\mathcal{D}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

2 Déterminisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini non déterministe $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{3\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	0,1	0
1	1	1,2
2	2,3	2
3	2,3	3

Construire un automate déterministe complet $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

3 Minimisation

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère l'automate fini déterministe complet ayant 8 états, soit $\mathcal{A} =< A, Q, \delta, 0, \{4, 5\} >$ dont la fonction de transition δ est donnée ci-dessous :

δ	a	b
0	0	1
1	2	3
2	2	4
3	2	3
4	5	6
5	4	7
6	7	6
7	6	7

Construire l'automate déterministe minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant le même langage.

4 Lemme de l'étoile

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage

$$L_1 = \{u \mid \quad |u|_b \geq 3\}.$$

a) Donner un automate fini reconnaissant L_1. On prendra soin de prouver que l'automate proposé reconnaît bien le langage L_1.

Sur le même alphabet, on considère le langage

$$L_2 = \{a^n b^m a^p b^q \mid n, m, p, q \geq 1 \quad et \quad n + p = m + q\}.$$

b) En utilisant le lemme de l'étoile, montrer que le langage L_2 n'est pas reconnaissable.

On considère enfin le langage

$$L_3 = L_1 \cup L_2.$$

c) Montrer que L_3 est reconnaissable. (On pourra commencer par montrer que les mots de L_3 qui ne sont pas dans L_1 sont en nombre fini.)

5 Langages et Expressions rationnelles

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage
$L = \{u \mid u \text{ ne contient pas le facteur } aaa\}$.

a) Donner tous les mots de L de longueurs 0, 1, 2 et 3.

b) Construire un automate fini reconnaissant le langage L. A nouveau, on prendra soin de prouver que l'automate proposé reconnaît bien le langage L.

c) En utilisant le système d'équations associé à l'automate, donner une expression rationnelle représentant le langage L.