(Belles fêtes de fin d'année.)

Université de Paris

Automates et analyse lexicale (AAL3)
L2 – Examen – 2h
18 décembre 2020

Nom : La correction

Prénom : *bonne année*

Numéro d'étudiant : *2021*

Consignes :

— Tous documents ou appareils électroniques interdits.

— Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.

— Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.

— Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller *les bords seulement*.

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(aa+b)^*ab$ et $(bab+ab)^*$. Donner les 3 plus petits mots de $A \cup B$:

1. ε **2.** ab **3.** bab

Exercice 2

Pour tout langage L, on définit le langage $\mathsf{Pal}(L) = \{u\bar{u} \mid u \in L\}$, où $\bar{u}$ désigne le miroir du mot u.

1. Donner un langage reconnaissable A infini tel que $\mathsf{Pal}(A)$ soit reconnaissable :

Expression rationnelle pour A	Expression rationnelle pour $\mathsf{Pal}(A)$
a^*	$(aa)^*$

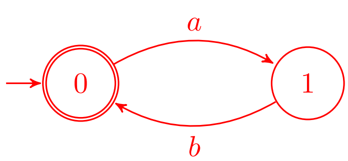
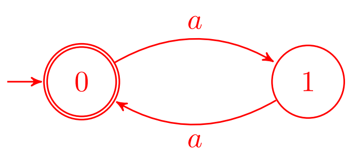
2. Donner un langage reconnaissable B tel que $\mathsf{Pal}(B)$ *ne soit pas* reconnaissable :

Expression rationnelle pour B	Description ensembliste pour $\mathsf{Pal}(B)$
a^*b	$\{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3

Pour tout langage L, on note $\tilde{L} = \{a^n \mid L \cap \Sigma^n \neq \emptyset\}$: a^n est dans $\tilde{L}$ ssi L possède au moins un mot de longueur n. Le but de cet exercice est de montrer que si L est reconnaissable, alors $\tilde{L}$ aussi.

1. Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $(ab)^*$. Donner ci-dessous des automates finis déterministes à 2 états pour L et $\tilde{L}$.

AFD pour L	**AFD pour** $\tilde{L}$
	

2. Soit L un langage reconnaissable, et $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD pour L.

À partir de $\mathcal{A}$, décrire un AFND $\tilde{\mathcal{A}}$ pour $\tilde{L}$: il suffit d'étiqueter toutes les transitions de $\mathcal{A}$ par a.

3. Conclure : à partir d'un AFD pour L, nous avons construit un AFND pour $\tilde{L}$, donc $\tilde{L}$ est reconnaissable si L l'est.

Exercice 4

Soit L le langage des mots de longueur $4n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, contenant en leur milieu $2n$ lettres a :

$$L = \{ua^{2n}v \mid n \in \mathbb{N}, |u| = |v| = n\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer si A est reconnaissable.
On considère la relation d'équivalence habituelle $u \sim_L v$ ssi $\forall w, [uw \in L \iff vw \in L]$.

1. Donner un mot w permettant de séparer les mots b et bb : a^2b

2. Soit i et j des entiers tels que $i < j$.
Donner un mot permettant de séparer les mots b^i et b^j : $a^{2i}b^i$

3. Combien la relation $\sim_L$ a-t-elle de classes d'équivalence ? Une infinité

4. D'après le théorème de Myhill-Nerode, on a donc (cocher la bonne réponse) :

☐ L reconnaissable ☑ L non reconnaissable

Exercice 5

Soit le langage $L = \{uav \mid |u| \not\equiv |v| \mod 2\}$. Est-il reconnaissable ?
Compléter la partie correspondante.

Oui, L est décrit par l'expression rationnelle suivante :

$$\big((a+b)^2\big)^* a(a+b)\big((a+b)^2\big)^*$$
$$+(a+b)\big((a+b)^2\big)^* a\big((a+b)^2\big)^*$$

(soit $|u|$ paire et $|v|$ impaire, soit l'inverse)
ou plus court :
$$\big((a+b)^2\big)^*(aa+ab+ba)\big((a+b)^2\big)^*$$

Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ ...., y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Même question avec le langage $L = \{uav \mid |u| \leq |v|\}$.

Oui, L est décrit par l'expression rationnelle suivante :

....

....

....

....

Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le lemme de l'étoile.

On choisit $u = b^N ab^N$:

alors $u \in L$ et $|u| \geq N$

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy| \leq N$, $y \neq \varepsilon$ et

$\forall k$, $xy^k z \in L$

Or pour $k = 2$ on a :

$xy^2z = b^{N+|y|}ab^N \notin L$

Contradiction avec le lemme de l'étoile

donc L n'est pas reconnaissable.

Exercice 6

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $a(aa + bb)^*b$. On se propose de décrire tous les résiduels de L en les ordonnant sous la forme d'un arbre.

1. Donner les expressions rationnelles e_1 et e_2 qui décrivent correctement les résiduels L_1, L_2 dans l'arbre ci-dessous.

$e_1 = (aa + bb)^*b$

$e_2 = b(aa + bb)^*b + \varepsilon$

2. Compléter par L_0, L_1, L_2 ou $\emptyset$ les pointillés dans l'arbre des résiduels afin que celui-ci soit correct.

$L_0 = \varepsilon^{-1}L = L$

$L_1 = a^{-1}L = \mathcal{L}(e_1)$ $\qquad$ $b^{-1}L = \emptyset$

$a^{-1}L_1 = L_0$ $\qquad$ $L_2 = b^{-1}L_1 = \mathcal{L}(e_2)$

$a^{-1}L_2 = \emptyset$ $\qquad$ $b^{-1}L_2 = L_1$

3. Quel(s) résiduel(s) contien(nen)t le mot vide ? (cocher la ou les bonnes réponses)
☐ L_0 ☐ L_1 ☑ L_2 ☐ $\emptyset$ ☐ aucun

4. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L, dont les états sont les quatre résiduels ci-dessus : compléter la table de transition suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et le ou les états terminaux).

	a	b
$\rightarrow L_0$	L_1	$\emptyset$
L_1	L_0	L_2
$\leftarrow L_2$	$\emptyset$	L_1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Exercice 7

On considère l'AFD complet $\mathcal{A}$ suivant reconnaissant un certain langage L.

	a	b
$\rightarrow$ 0	1	3
$\leftarrow$ 1	2	0
2	0	4
3	0	4
$\leftarrow$ 4	2	0

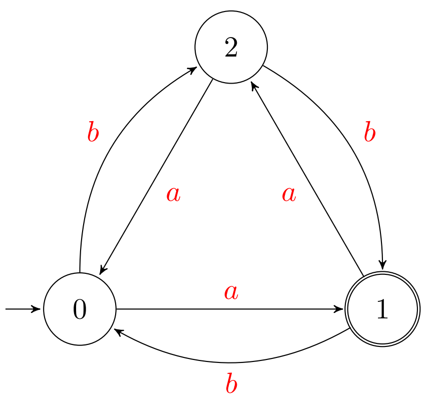
Minimiser $\mathcal{A}$ en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : $\{0, 2, 3\}$ $\{1,4\}$

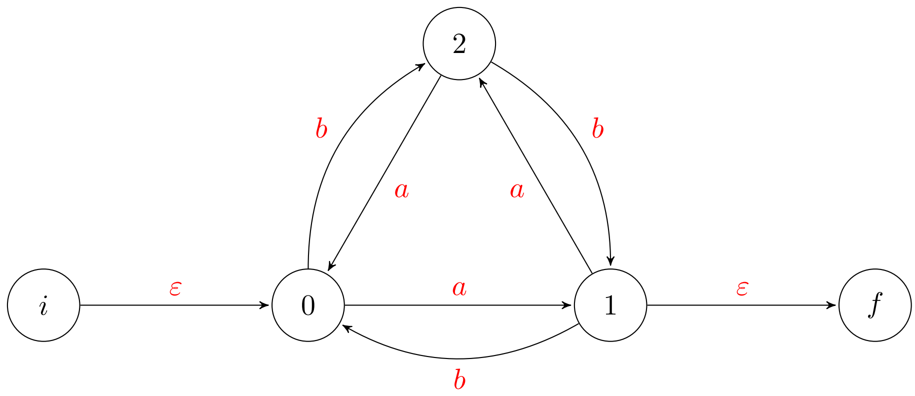
2. a et b séparent 0 de 2 et 3

Groupes d'états à l'étape 1 : $\{0\}$ $\{2, 3\}$ $\{1, 4\}$

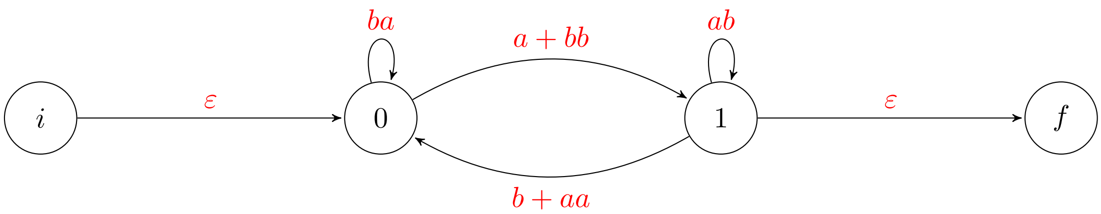
3. a et b ne séparent plus d'états. On obtient l'automate déterministe complet minimal suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



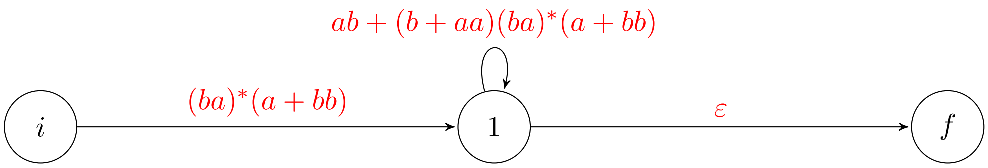
Afin de déterminer une expression rationnelle pour L, compléter les transitions dans les étapes de l'algorithme de Brzozowski-McCluskey ci-dessous.



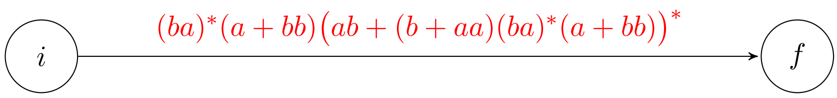
Élimination de l'état 2.



Élimination de l'état 0.



Élimination de l'état 1.



En s'aidant de l'automate minimal de L trouvé ci-dessus, ou de l'expression rationnelle obtenue par l'algorithme de Brzozowski-McCluskey, déterminer les entiers α, β et γ tels que

$$L = \{u \mid \alpha|u|_a + \beta|u|_b \equiv \gamma \mod 3\} :$$

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 1$$