

Durée 3 heures. Les documents et les appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas autorisés.

**Exercice 1 :**

Dans le petit village de Bonchoix, les 164 suffrages exprimés au second tour de l'élection ne comportent aucun bulletin blanc ou nul : 90 électeurs ont choisi le candidat  $A$  et 74 le candidat  $B$ . Lors du dépouillement, le maire prend un par un les bulletins dans l'urne, et annonce au fur et à mesure le nom sur ces bulletins.

**Question 1 :** Définir un univers  $\Omega$  approprié pour décrire les événements possibles, et en donner le cardinal.

**Question 2 :** Quelle est la probabilité que le maire annonce d'abord tous les bulletins du candidat  $A$  puis ceux du candidat  $B$  ? Quelle est celle qu'il annonce d'abord tous les bulletins du candidat  $B$  puis ceux du candidat  $A$  ?

**Question 3 :** Quelle est la probabilité que, à chacun des trois instants suivant le dépouillement de chacun des 3 premiers bulletins tirés, le nombre de bulletins dépouillés en faveur du candidat  $A$  soit toujours au moins égal au nombre de ceux en faveur du candidat  $B$  ?

**Exercice 2 :**

Une urne contient 4 boules vertes, 5 boules rouges et 6 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

**Question 1 :** Quelle est la probabilité pour avoir une boule de chaque couleur ?

**Question 2 :** Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de la même couleur ?

**Question 3 :** Sachant que les trois boules sont de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?

**Question 4 :** Les événements "les trois boules sont de la même couleur" et "les trois boules sont rouges" sont-ils indépendants ?

### Exercice 3 :

Tous les jours à la pause, Jean prend une boisson au nouveau distributeur qui lui permet de prendre au choix un café, un thé ou un chocolat. La première fois il a pris un café, et il change de boisson à chaque fois. S'il a pris un café, il prend la fois d'après un thé 2 fois sur 3, et un chocolat 1 fois sur 3 ; s'il a pris un chocolat, il prend la fois d'après un thé 3 fois sur 4, et un café 1 fois sur 4 ; s'il a pris un thé, il prend la fois d'après un café 3 fois sur 5, et un chocolat 2 fois sur 5. De retour dans son bureau, il note sur une feuille  $a$  s'il a pris un café,  $b$  s'il a pris un thé et  $c$  s'il a pris un chocolat, à la suite de ce qu'il a marqué les fois d'avant.

**Question 1 :** Au bout de 4 jours quels sont les mots de longueur 4 qu'il a pu écrire sur sa feuille ? Donner une expression du langage  $L$  sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$  de tous les mots possibles qui peuvent être écrits sur sa feuille au bout d'un nombre quelconque non nul de jours ? (*C'est un langage rationnel, dont on pourra donner une expression rationnelle étendue, i.e. utilisant le complément*).

**Question 2 :** En notant  $p_n$ ,  $q_n$  et  $t_n$  les probabilités qu'il prenne respectivement un café, un thé ou un chocolat le  $n$ -ème jour (et donc  $p_1 = 1$ ,  $q_1 = t_1 = 0$ ), donner  $p_{n+1}$ ,  $q_{n+1}$  et  $t_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ ,  $q_n$  et  $t_n$ .

**Question 3 :** Calculer  $p_2$ ,  $q_2$ ,  $t_2$ ,  $p_3$ ,  $q_3$  et  $t_3$ . Quelle est la probabilité qu'il ait écrit  $a$  le quatrième jour ?

### Exercice 4 :

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher portant chacune un numéro : 4 portent le numéro 1, 4 le numéro 2, 2 le numéro 3 et 2 le numéro 4.

On tire simultanément 2 boules de l'urne.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui est la somme des numéros des boules tirées.

**Question 1 :** Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?

**Question 2 :** Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Question 3 :** On fait 20 fois de suite ce tirage, en remettant les boules tirées avant le tirage suivant. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui est le total des sommes des numéros des boules tirées. Calculer  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .

### Exercice 5 :

Le mardi, le restaurant universitaire sert 500 repas et propose le choix entre 2 plats principaux : couscous ou daube. A un instant donné, chaque utilisateur a une probabilité de 54% de prendre le couscous.

**Question 1 :** Soit  $X$  le nombre de plats de couscous servis. Quelle est la loi de  $X$  ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.

**Question 2 :** Majorer le nombre de daubes nécessaires pour que la probabilité que tous les amateurs de daubes soient servis dépasse 95% ?