

Éléments de probabilité : correction de l'interrogation 3

L2 informatique, groupe 3

Le 5 avril 2011

Exercice 1

(6 points)

1. Le nombre N de voix du candidat B est compris entre 41 000 et 53 000. La variable aléatoire $(N - 41\,000)$ suit une loi binomiale de paramètres $p = 2/3$ et $n = 12\,000$. Donc $P(N = 41\,000 + k) = \binom{12\,000}{k} (2/3)^k (1/3)^{12\,000-k}$ pour $0 \leq k \leq 12\,000$ et $E(N) = 41\,000 + 2/3 \times 12\,000 = 49\,000$ et $Var(N) = 2/3 \times 1/3 \times 12\,000 = 8\,000/3$.
2. $P(N \geq 50\,000) \leq P(|N - E(N)| \geq 1\,000) \leq Var(N)/10^6 = (8/3) \cdot 10^{-3}$ par Tchebychev, soit environ 0,3%.

Exercice 2

(14 points)

1. Pour $k \geq 1$, $P(X = k) = (4/5)^{k-1} (1/5)$: loi géométrique de paramètre $p = 1/5$. Espérance $E(X) = 1/p = 5$, variance $Var(X) = (1-p)/p^2 = 20$.
2. Tchebychev : $P(X \geq 15) = P(|X - E(X)| \geq 10) \leq Var(X)/10^2 = 1/5$.
3. $Y_i = 3 - X$ donc pour $k \in]-\infty, 2]$, $P(Y_i = k) = P(X = 3 - k) = (4/5)^{2-k} / 5$. Espérance $E(Y_i) = 3 - E(X) = -2$ (par linéarité) et variance $Var(Y_i) = Var(3 - X) = Var(X) = 20$.
4. $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ donc $E(Y) = -200$ (par linéarité) et $Var(Y) = 2\,000$ (par indépendance des Y_i).
5. Tchebychev : $P(Y \geq 200) \leq P(|Y - E(Y)| \geq 400) \leq 2\,000/400^2 = 1/80$ soit 1,25%.