UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - LICENCE 2 - ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉS EP4 - CONTRÔLE 4

NI DOCUMENT - NI MACHINE - BARÈME INDICATIF - DURÉE 90 MINUTES

TOUTE RÉPONSE DEVRA ÊTRE CLAIREMENT JUSTIFIÉE

Exercice 1 (4 points) On considère le jeu « chuck-a-luck ». Un joueur mise 1€ et choisit un nombre entre 1 et 6. Ensuite il lance 3 dés homogènes. Si au moins un dé montre le nombre choisi, sa mise lui est rendue et, en plus, il obtient 1€ pour chaque dé qui montre son numéro, sinon il a perdu. Soit T la variable aléatoire donnant le gain algébrique. Déterminer $E(T)$ et $V(T)$.

Exercice 2 (4 points) Une loterie se déroule une fois par semaine. Sur 100 billets, 5 sont gagnants. Chaque billet coûte 10€. On dispose de 100€. Deux stratégies sont envisagées : on achète 10 billets en une seule fois ou on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

1. Vérifier que, pour tout entier α vérifiant $91 \leq \alpha \leq 99$, on a $\frac{\alpha-5}{\alpha} < \frac{95}{100}$.
2. Déterminer quelle stratégie offre la plus grande probabilité d'obtenir au moins un billet gagnant.

Exercice 3 (4 points) Quatre candidats (Assia, Bartek, Camille et Dmitry) sont sélectionnés pour tenter de gagner un voyage. Pour cela, chacun à tour de rôle (dans l'ordre alphabétique) est invité à tirer une boule dans une urne contenant quatre boules dont une seule est gagnante.

1. Calculer qui a le plus de chance de gagner dans le cas d'un tirage *avec* remise.
2. Calculer qui a le plus de chance de gagner dans le cas d'un tirage *sans* remise.
3. En définissant une variable aléatoire adéquate, comparer les deux cas du point de vue de l'opérateur.

Exercice 4 (6 points) Soit Z une variable aléatoire de support $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et d'espérance $\frac{1}{4}$.

1. Proposer un majorant pour $P(Z \geq 1)$ le plus petit possible.
2. En supposant que $Z + 1$ suive une loi binomiale, calculer $P(Z \geq 1)$.
3. Commenter.

Exercice 5 (6 points) À certains jeux de société, les joueurs avancent d'un nombre de cases égal à la somme des points de deux dés. De plus, un joueur rejoue tant qu'il obtient un double (c'est-à-dire que chaque dé donne le même nombre de points). Il passe la main après le premier lancer sans double. On s'intéresse au nombre total de cases parcourues au cours du tour d'un joueur.
Lors du tour d'un joueur, pour $i \geq 1$, on note D_i l'événement "le i-ème lancer a lieu et donne un double". On note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le i-ème lancer n'a pas lieu, et à la somme des points du i-ème lancer sinon.

1. Donner la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.
2. Calculer $P(D_1)$, $P_{D_{i-1}}(D_i)$ et trouver une relation de récurrence entre $P(D_i)$ et $P(D_{i-1})$. En déduire une expression explicite de $P(D_i)$ en fonction de i.
3. Pour $i \geq 2$, exprimer $P_{D_{i-1}}(X_i = k)$ et $P_{\overline{D_{i-1}}}(X_i = k)$ en fonction de $P(X_1 = k)$ en distinguant les cas $k = 0$ et $k > 0$.
4. En déduire une relation simple entre $P(X_i = k)$ et $P(X_1 = k)$ pour $k > 0$, puis entre $E(X_i)$ et $E(X_1)$.
5. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $E(S_n)$ converge lorsque n tend vers l'infini. Donner sa limite. Interpréter.

***