NOM :	PRÉNOM :	NUM :

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - L2 - ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉS EP4 - CONTRÔLE 3

NI DOCUMENT - NI MACHINE - BARÈME INDICATIF - DURÉE 90 MINUTES

TOUTE RÉPONSE DEVRA ÊTRE CLAIREMENT JUSTIFIÉE (SAUF EXERCICE **4a**)

Exercice 1 (3 points) On lance quatre fois une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire comptant la longueur de la plus longue suite de « pile » successifs. Calculer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

Exercice 2 (6 points) Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et neuf jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

> Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :
> – si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
> – si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.
> À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

1. (a) Calculer $P(G)$.
   (b) Calculer la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu.
   (c) Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux.
   (d) Donner une borne au nombre minimal m de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 99%.
2. L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :
   – chaque joueur paie 1€ par partie ;
   – si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
   – si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

   (a) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.
      i. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
      ii. Préciser si le jeu est favorable à l'organisateur.
   (b) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Donner les valeurs de l'entier n pour lesquelles le jeu est défavorable à l'organisateur.

Exercice 3 (3 points) On considère une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 2.

1. Minorer $P(1 < X < 5)$.
2. Supposons que X suive une loi binomiale. Calculer $P(1 < X < 5)$.

Exercice 4a (5 points) Un exercice consiste en un QCM de cinq questions. Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées dont une et une seule est vraie. Le correcteur donne 1 point pour une réponse correcte à une question, ne donne ni ne retire de point en l'absence de réponse et retire 0.25 point pour une réponse incorrecte. Une note négative est ramenée à zéro.

1. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard obtienne un point à la première question ?

   ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3.75}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{5}$

2. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard obtienne une note supérieure à la moyenne ?

   ☐ $\frac{65}{1024}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{307}{1024}$ ☐ $\frac{53}{512}$

3. Quelle est la probabilité qu'un candidat connaissant la réponse à une question et répondant aux autres au hasard obtienne une note supérieure à la moyenne ?

   ☐ $\frac{71}{256}$ ☐ $\frac{23}{256}$ ☐ $\frac{67}{256}$ ☐ $\frac{13}{256}$

4. À combien de questions un candidat connaissant deux réponses uniquement et souhaitant maximiser ses chances d'obtenir une note supérieure à la moyenne a-t-il intérêt à répondre ?

   ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. À combien de questions un candidat connaissant trois réponses uniquement et souhaitant maximiser ses chances d'obtenir une note supérieure à la moyenne a-t-il intérêt à répondre ?

   ☐ 2 ☐ 0 ☐ 3 ☐ 1

Exercice 4b (3 points) On suppose que le niveau est homogène, ce que l'on modélise grossièrement comme suit. Un candidat est dans le groupe H_i s'il connaît la réponse à exactement $5 - i$ questions et répond aux i autres au hasard. On prétend que tout candidat est dans un et exactement un groupe, de sorte que l'ensemble des H_i forme une partition de l'ensemble des candidats (cela signifie en particulier que chaque candidat répond à toutes les questions du QCM). On considère alors que la loi de probabilité sur cette partition est la loi uniforme.
Calculer dans ces conditions la probabilité qu'un candidat ayant obtenu une note supérieure à la moyenne ait répondu complètement au hasard.

***