Université Paris 7- Denis Diderot
L2 d'Informatique
Probabilités Discrètes
Examen du 18 mai 2010

Durée 3 heures. Les documents et les appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas autorisés.

Exercice 1 :

On se donne 4 dés a, b, c, d dont les faces sont marquées comme indiqué à la figure 1.

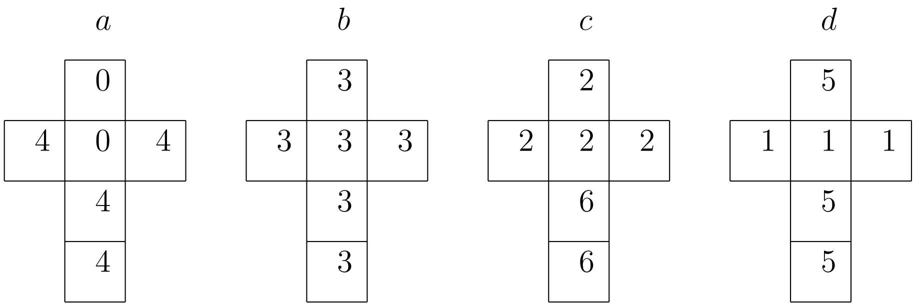

Figure 1: les dés de Bradley Efron

Le joueur A choisit un dé, puis le joueur B choisit l'un des dés restants. Chacun lance alors son dé, et le vainqueur est celui qui obtient le nombre le plus grand.

Question 1 : En supposant que A choisit le dé a, quel dé doit choisir B pour maximiser sa probabilité d'être vainqueur ?

Question 2 : Même question si le joueur A choisit un autre dé.

Question 3 : Quelle(s) conclusion(s) tirez-vous de ces calculs ?

Exercice 2 :

Ayant observé que 4% des réservations pour un vol ne sont pas utilisées, une compagnie aérienne vend 75 billets pour 73 places.

Question 1 : Donner une expression de la probabilité exacte pour que tous les passagers aient une place ?

Question 2 : Calculer une valeur approchée de cette probabilité en utilisant la loi de Poisson. *(rappel : $e \simeq 2,71$)*

Exercice 3 :

Une grenouille franchit un escalier par bonds successifs de une ou deux marches, de manière équiprobable au départ, puis elle fait un bond de deux marches avec une probabilité de 0,6 si elle avait fait un bond d'une seule marche juste avant, et de 0,3 dans le cas contraire.

Question 1 : Quelle est la probabilité que son deuxième bond soit un bond de deux marches ?

Question 2 : Pour $i > 0$, soit S_i (resp. T_i) l'événement "le i-ème bond est un bond de deux marches (resp. d'une marche)". Calculer $P(S_{i+1})$ en fonction de $P(S_i)$.

Question 3 : En posant pour tout entier i : $u_i = P(S_i) + x$, déterminer x pour que la suite des u_i soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_i, et celle de $P(S_i)$.

On suppose désormais que l'escalier possède 7 marches (si la grenouille se trouve sur la sixième marche, elle fait un bond d'une seule marche). Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonds que fait la grenouille pour franchir cet escalier.

Question 4 : Donner la loi de Y.

Question 5 : Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 4 :

Un central téléphonique dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité de 4% de se servir de sa ligne (on suppose que les appels sont indépendants).

Question 1 : Soit X le nombre de lignes occupées à un instant donné. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Question 2 : Donner une borne au nombre minimum d'appels que doit pouvoir traiter simultanément le central pour que la probabilité de saturation du central à un instant donné soit inférieure à 0,025 ?

Exercice 5 :

Trois joueurs, A, B et C font une partie constituée d'une suite de duels obéissant aux règles suivantes :
— les joueurs A et B commencent,
— le gagnant d'un duel joue le duel suivant contre celui qui n'a pas joué.
Ils décident que le vainqueur de la partie est celui qui gagne deux duels consécutifs.

On notera par la lettre a (resp. b, c) le résultat d'un duel qui voit le joueur A (resp. B, C) l'emporter, et une suite de résultats de duels par un mot f sur l'alphabet $Z = \{a, b, c\}$. Ainsi le mot $acbb$ représente une suite de 4 duels, le premier ayant été gagné par le joueur A, le second par le joueur C, et les 2 derniers par le joueur B (qui est donc le vainqueur de la partie).

Dans un premier temps, on suppose que la partie s'interrompt au plus tard après 4 duels, sans nécessairement qu'il y ait eu de vainqueur.

Question 1 : Ecrire l'ensemble des mots sur Z représentant les résultats d'une suite possible de duels selon ces règles.
Représenter ces mots selon un arbre.

On suppose que la probabilité que A gagne contre B vaut p, celle que B gagne contre C vaut q, celle que C gagne contre A vaut r, et on notera $\bar{p} = 1-p$, $\bar{q} = 1-q$ et $\bar{r} = 1-r$.

Question 2 : Exprimer en fonction de p, q et r la probabilité que A soit vainqueur, celle que B soit vainqueur, celle que C soit vainqueur, celle qu'il n'y ait aucun vainqueur. Application numérique : $p = q = r = 0,5$.

On abandonne maintenant la contrainte "pas plus de 4 duels", les joueurs ayant décidé de jouer jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Question 3 : Quel langage $L_A \subset Z^*$ (resp. L_B, L_C) représente la victoire de A (resp. de B, de C) ? *(indication : c'est un langage rationnel.)*

Question 4 : En s'appuyant sur l'arbre construit à la première question, exprimer en fonction de p, q et r la probabilité de victoire de chacun des joueurs. Application numérique : $p = q = r = 0,5$.

Question 5 : Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de duels de la partie. Pour $p = q = r = 0,5$, donner la loi, puis l'espérance de X.