

Examen de Combinatoire

Jeudi 19 juin 2014

Durée : 3 heures

Exercice 1 : coefficient binomial (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n et $P(E)$ l'ensemble de ses parties.

1. Trouver le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$ et $X \cap Y = \emptyset$.
2. On veut trouver le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$.
 - Montrer par double comptage que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 3^n$
 - Montrer par la formule du binôme (écrire la formule) que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 3^n$.
 - En déduire le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$.
3. Trouver le nombre de triplets (X, Y, Z) d'éléments de $P(E)^3$ tels que $X \cup Y \cup Z = E$.
4. Trouver le nombre de p -uplets $(X_1, \dots, X_p)$ d'éléments de $P(E)^p$ dont la réunion vaut E .

Exercice 2 : placements (4 points)

Un jardinier plante des bulbes de dahlias au pourtour d'un parterre circulaire, régulièrement espacés. Il possède 6 bulbes de dahlias rouges, 4 de dahlias oranges et 2 de dahlias jaunes.

Combien de massifs différents peut-il composer

1. sans restriction ?
2. en laissant les dahlias jaunes ensemble ?
3. sans qu'il y ait plus de 2 dahlias oranges à la suite ?
4. les dahlias de même couleur étant groupés 2 par 2 ?

Exercice 3 : applications (5 points)

Soient A et B deux ensembles de cardinal $|A| = m$ et $|B| = n$:

1. donner la définition d'une injection de A à B . Quel est le nombre d'injections de A dans B ?
2. donner la définition d'une surjection de A à B .
3. donner la formule du principe d'inclusion-exclusion.

4. En utilisant le principe d'inclusion exclusion montrer que le nombre de surjections de A dans B est :

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ n! & \text{si } m = n \\ \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} (n-p)^m & \text{si } m > n \end{cases}$$

Exercice 4 : paires non croisées et chemins de Dyck (6 points)

- Donner la définition d'un chemin de Dyck de longueur $2n$.
- Soit un disque comportant $2n$ points ($n \in \mathbb{N}^*$) sur son bord, numérotés de 1 à $2n$ consécutivement. On appelle système de paires non croisées sur ce disque un appariement deux à deux des points tel que :
 - deux points appariés sont reliés par un arc passant à l'intérieur du disque ;
 - Les arcs ne se croisent pas entre eux.

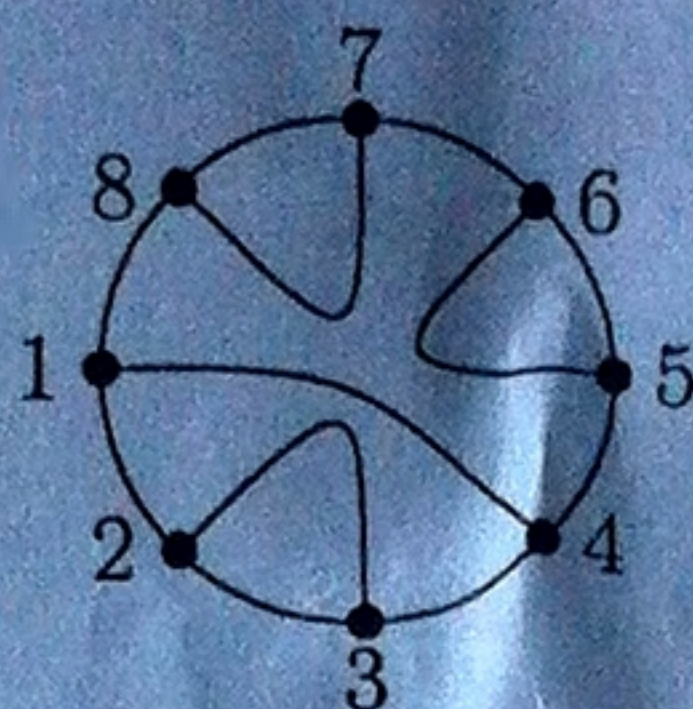


FIGURE 1 – système de paires non croisées sur le disque à 8 points

L'ensemble des systèmes de paires non croisées sur le disque à $2n$ points est en bijection avec l'ensemble de chemins de Dyck de longueur $2n$. Etant donné un système de paires non croisées sur le disque à $2n$ points, on obtient un chemin de Dyck de longueur $2n$ de la façon suivante :

- Parcourir le bord du disque point par point à partir du point 1 dans l'ordre des numéros croissants. Pour chaque point i du disque visité :
 - s'il est le début d'un arc (i, j) , c.à.d. si on rencontre l'arc (i, j) pour la première fois, écrire un pas montant du chemin de Dyck ;
 - s'il est la fin d'un arc (k, i) , c.à.d. si on rencontre l'arc (k, i) pour la deuxième fois, écrire un pas descendant.

- Donner tous les systèmes de paires non croisées sur le disque à 6 points.
- Donner le chemin obtenu à partir du système de paires non croisées de la figure 1 en appliquant la transformation décrite ci-dessus.
- Soit un système de paires non croisées sur le disque à $2n$ points auquel on applique la transformation décrite ci-dessus.
 - Montrer que le chemin obtenu a toujours une longueur pair.
 - Montrer que le chemin obtenu est bien un chemin de Dyck.
- Décrire la bijection inverse.
- Quelle est le nombre de paires non croisées sur le disque à $2n$ points ?