

Examen du 13 janvier 2014

durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés

Un barème est donné à titre indicatif.

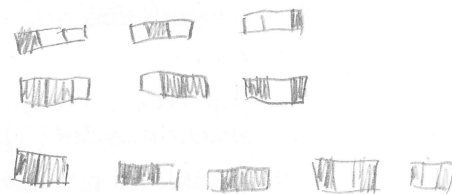
Toute réponse devra être justifiée.

Le coefficient binomial (5 points)

On considère une séquence de n cases,

1. On appelle $S_{n,1}$ (respectivement $S_{n,2}$) l'ensemble des séquences de n cases dont une est (respectivement deux sont) coloriée(s). Quel est le cardinal de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$?
2. On définit l'application suivante : étant données deux séquences, s_1 appartenant à $S_{n,1}$ et s_2 appartenant à $S_{n,2}$, on obtient une nouvelle séquence t de n cases selon la règle suivante : pour tout $i = 1, \dots, n$, la i -ème case de t est coloriée si la i -ème case de s_1 ou de s_2 est coloriée. On note T_n l'image de cette application, autrement dit l'ensemble des configurations t qu'on peut obtenir à partir de deux séquences quelconques s_1 et s_2 de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
 - (a) Dessiner toutes les configurations possibles de $S_{n,1}$ pour $n = 1, 2, 3$ et toutes les configurations possibles de $S_{n,2}$ pour $n = 2, 3$. ✓
 - (b) En utilisant l'application ci-dessus dessiner toutes les configurations possibles de T_n pour $n = 3$. ✓
 - (c) Décrire l'ensemble T_n pour n quelconque. ✓
 - (d) Quel est le cardinal de T_n ?
 - (e) Montrer que l'application définie ci-dessus n'est pas injective.
 - (f) Modifier convenablement le codomaine de l'application et l'application elle-même en définissant une bijection qui prouve la formule suivante, pour $n \geq 3$:

$$n \cdot \binom{n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3}.$$



Problème de comptage (4 points)

Une commission de 4 femmes et 4 hommes est constituée à partir d'un groupe de 10 femmes et 6 hommes. Combien y a-t-il de commissions différentes possibles sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Il y a deux hommes, appelons les H1 et H2, qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.
3. Il y a un homme H3 et une femme F1 qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.

Une fois la commission formée, les membres de la commission vont au restaurant et occupent une table ronde de 9 places (donc une chaise reste vide). En supposant que deux configurations à rotation près sont les mêmes, combien de façons ont-ils de s'asseoir si :

4. Il n'y a pas de restrictions. ✓
5. En alternant les hommes et femmes. ✓
6. En alternant deux hommes et deux femmes.
7. En groupant les femmes et les hommes.
8. En sachant que H1 ne veut pas s'asseoir à côté de la chaise vide.

Permutations (5 points)

1. Quel est le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$?

Soit U_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement un cycle, par exemple la permutation 234561, dont une des représentations cycliques est (123456).

2. Écrire les ensembles U_1, U_2, U_3, U_4 . ✓
3. Déterminer le cardinal de U_n . ✓
4. Déterminer le nombre de permutations $U_{k,n-k}$ de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement un cycle de longueur k et un cycle de longueur $n - k$.
5. En déduire une formule pour le nombre de permutations S_n^2 de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement deux cycles. ✓
6. En déduire une formule pour le nombre de permutations P_n^2 de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement deux cycles de longueurs différentes de 1, pour $n > 2$.

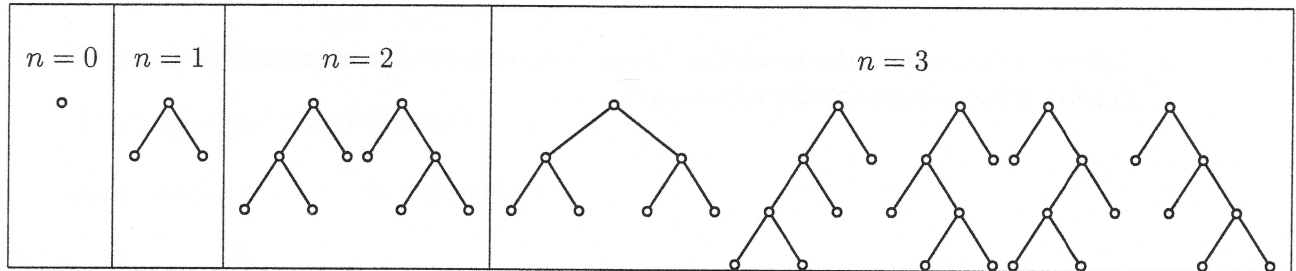
On veut maintenant compter les permutations sans cycles de longueur 1, c.à.d. les dérangements. Par exemple 612345 est un dérangement de longueur 6.

7. Soit A_{i_1} , $i_1 = 1, \dots, n$ l'ensemble des permutations de longueur n ayant le cycle (i_1) (ces permutations peuvent avoir aussi d'autres cycles de longueur 1). Quel est le cardinal de A_{i_1} ?
8. $A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_p}$, pour $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, est alors l'ensemble des permutations ayant les cycles $(i_1), (i_2), \dots, (i_p)$. Quel est le cardinal de cet ensemble ?
9. À l'aide du principe d'inclusion exclusion (écrire la formule), calculer $|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n|$.
10. En utilisant les résultats [1.] et [9.], compter le nombre de dérangements de longueur n .
11. En utilisant le même principe, compter le nombre de dérangements de longueur n ayant exactement deux cycles, pour $n > 2$, et vérifier que c'est la même formule que au point [6.].

Arbres binaires complets (6 points)

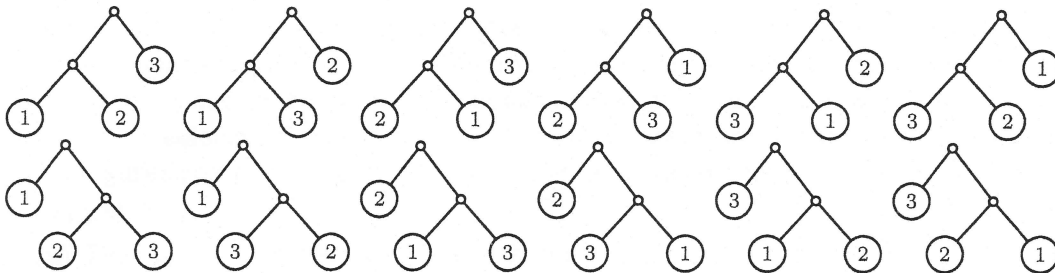
Rappelons qu'un arbre binaire complet est un arbre enraciné avec deux types de sommets : les noeuds internes, qui ont chacun 2 fils (le fils gauche et le fils droit), et les feuilles, qui n'ont pas de fils.

Voici les arbres binaires complets à n noeuds pour $n = 0, 1, 2, 3$:



Un arbre binaire étiqueté à k feuilles est un arbre binaire complet ayant k feuilles qui portent des numéros distincts pris dans $\{1, \dots, k\}$.

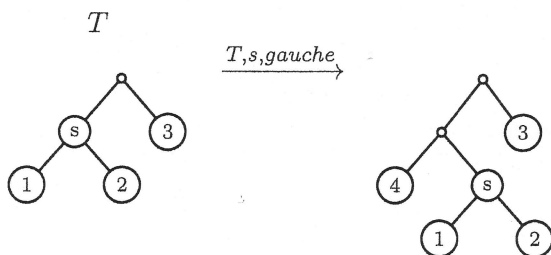
Voici les arbres binaires étiquetés à 3 feuilles :



1. Quel est le nombre de feuilles d'un arbre binaire complet à n noeuds internes ? (ne pas oublier de démontrer votre réponse) ✓
2. Soit A_n l'ensemble des arbres binaires étiquetés à n noeuds et B_n celui des arbres binaires complets à n noeuds. Montrer que $a_n = (n+1)!b_n$. ✓
3. Rappelez la bijection vue en cours entre les arbres binaires complets à n noeuds internes et les chemins de Dyck de longueur $2n$.
4. Quel est le nombre d'arbres binaires complets à n noeuds internes ?

Considérons la construction suivante : étant donné un arbre binaire étiqueté T à k feuilles, on choisit un sommet (noeud ou feuille) s de T et un côté c (gauche ou droite), puis on insère un nouveau sommet au milieu de l'arête joignant s à son père et une feuille d'étiqueté $k+1$ du côté c de cette arête.

Voici un exemple :



5. Que fabrique cette construction ?
6. Appliquer cette construction pour les arbres étiquetés avec 1 noeud interne.
7. Montrer que la construction précédente définit une bijection (préciser entre quels ensembles et décrire la bijection inverse) et en déduire que pour $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = a_n \cdot (2n + 1) \cdot 2$$

8. Calculer le nombre d'arbres binaires étiquetés en itérant la relation précédente et retrouver ainsi le nombre d'arbres binaires complets.