Université Paris 7 - Licence | Année universitaire 2009–2010

Examen de Combinatoire

Mercredi 11 janvier 2010

Durée : 2 heures 30

Avertissement

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Le barème est indicatif.

Problème de comptage (3 points)

Une commission de 4 femmes et 4 hommes est constituée à partir d'un groupe de 10 femmes et 6 hommes. Combien y a-t-il de commissions différentes sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Il y a deux hommes qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.
3. Il y a un homme et une femme qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.

Le coefficient binomial (5 points)

On considère une séquence de n cases,

1. On appelle $S_{n,2}$ l'ensemble des séquences de n cases dont deux sont coloriées. Quel est le cardinal de $S_{n,2}$?
2. On définit l'application suivante : étant données deux séquences s_1 et s_2 appartenants à $S_{n,2}$, on obtient une nouvelle séquence s_3 de n cases selon la règle suivante : pour tout $i = 1, \dots, n$, la i-ème case de s_3 est coloriée si la i-ème case de s_1 ou de s_2 est coloriée.
3. Donner l'image de cette application sur les deux exemples suivants :
4. Décrire l'ensemble image de cette application.
5. Donner une interprétation combinatoire de la formule

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \cdot \binom{n}{3} + 3 \cdot \binom{n}{4}.$$

Le principe d'inclusion-exclusion (5 points)

1. Donner la formule d'inclusion-exclusion.
2. Soit S_i, pour $i = 1, \ldots, n-1$, l'ensemble des permutations σ de $1, \ldots, n$ telles que $\sigma(i) = i+1$ et soit $|S_i|$ son cardinal. Calculer $|S_i|$, c.à.d. le nombre de permutations de longueur n ayant le i-ème élément égal à $i+1$.
3. Calculer $|S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}|$ où $S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$ est l'ensemble des permutations σ de $1, \ldots, n$ telles que $\sigma(i_k) = i_k + 1$, avec $i_k \neq n$, pour tout $k = 1, \ldots, p$.
4. En utilisant la formule d'inclusion-exclusion, calculer le nombre de permutations σ de $1, \ldots, n$ telles qu'il existe au moins une position $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ où $\sigma(i) = i+1$.
5. Montrer que le nombre de permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma(i) \neq i+1$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ est :
$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(n-1)!}{p!}(n-p).$$

Le chemins de Dyck (7 points)

On considère des chemins dans le plan formés de pas nord-est $(1,1)$ ou sud-est $(1,-1)$, issus de l'origine $(0,0)$ et terminant en $(2n,0)$.

1. Montrer que le nombre de ces chemins est $\binom{2n}{n}$.
1. Donner une bijection entre cette classe de chemins et les mots de $2n$ bits dont n sont égaux à 0.

Un chemin de Dyck est un chemin du type précédent qui ne descend jamais en dessous de l'axe x. Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des chemins de Dyck avec $2n$ pas. Un chemin de Dyck surélevé est un chemin de Dyck qui ne descend jamais en dessous de l'axe $x = 1$ à l'exception du premier et dernier pas. Soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des chemins de Dyck surélévés. Figura

1. Lister les chemins de Dyck pour $n \leq 3$.
2. Lister les chemins de Dyck surélévés pour $n \leq 4$.
3. Donner une bijection entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{D}_{n-1}$.
4. Appliquer la bijection entre $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{D}_3$.
5. Quel est le cardinal de $\mathcal{D}_n$ et de $\mathcal{C}_n$?

Les nombres de Fibonacci (5 points)

Soit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ la récurrence de Fibonacci :

1. Calculer la série génératrice des nombres de Fibonacci.
2. En utilisant la décomposition en éléments simples, donner une formule pour les nombres de Fibonacci F_n.