Combinatoire et Probabilités discrètes

Partiel du 23 Novembre 2006 – durée : 2 h 30

Aucun document n'est autorisé, y compris notes de cours, calculatrices et téléphones portables

Un barême provisoire est donné à titre indicatif.
Toute question non traitée peut être admise.

Exercice : 9 points

Un dérangement de $\{1,\ldots,n\}$ est une permutation sans point fixe de S_n, le groupe des permutations, c'est-à-dire une permutation σ telle que pour tout $i=1,\ldots,n$, $\sigma(i)\neq i$.

Partie 1

1. Soient $I\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ (où $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ désigne l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$) et A_I l'ensemble des permutations laissant fixes les éléments de I. Calculer $|A_I|$ pour tout I dans $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$.
2. En déduire grâce à la formule du crible, le cardinal de $A_{\{1\}}\cup\ldots\cup A_{\{n\}}$.
3. En déduire que le nombre de dérangements de $\{1,\ldots,n\}$ est

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{D}_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}. \tag{1}$$

Partie 2

On peut calculer le nombre de dérangements de $\{1,\ldots,n\}$ d'une autre façon :

3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n>1, \quad \mathcal{D}_n=(n-1)[\mathcal{D}_{n-1}+\mathcal{D}_{n-2}].$$

Indication : considérer les dérangements σ tels que $\sigma(i)=n$ et $\sigma(n)=i$, ainsi que les dérangements σ tels que $\sigma(i)=n$ et $\sigma(n)=j$ avec $i\neq j$.

4. En déduire par récurrence la relation :

$$\forall n>1, \quad \mathcal{D}_n=n\mathcal{D}_{n-1}+(-1)^n.$$

Cette relation permet de retrouver par récurrence l'équation (1) (non demandé ici).

Partie 3

Application : n hommes arrivent à une fête chacun avec un chapeau, qu'ils déposent au vestiaire. Quel est le nombre de façons de mettre les n chapeaux sur les n têtes en sachant qu'au moins un homme récupère son chapeau ?

Problème : 14 points

Soit $\mathbb{Z}^2$ le plan cartésien discret. On considère des pas unitaires $\nearrow$ et $\searrow$. Un *polyomino parallélogramme* est la région comprise entre deux chemins constitués par des pas $\nearrow$ et $\searrow$ et qui ne se rencontrent qu'au début et à la fin. Le *demi-périmètre* s d'un polyomino parallélogramme est la moitié du nombre de pas qui constituent son bord. Dans la figure suivante on a dessiné les polyominos ayant demi-périmètre 2, 3, et 4. Le début des deux chemins est le point le plus à gauche de chaque polyomino.

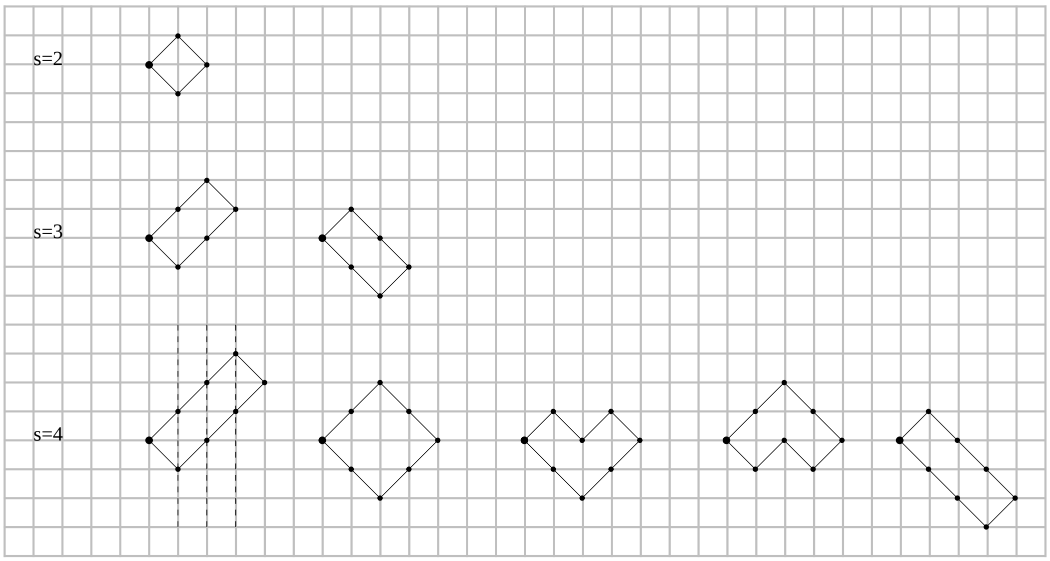

Fig. 1 – Les premiers polyominos parallèlogrammes.

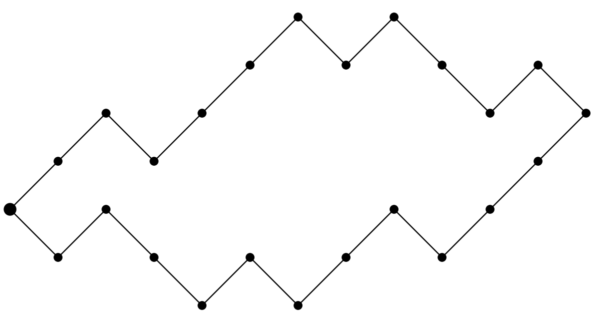

Fig. 2 – Un polyomino parallèlogramme de demi-périmètre plus grand.

1. Dessiner les 14 polyominos ayant demi-périmètre 5.
2. On peut voir un polyomino comme une séquence de couples de pas $\nearrow$ et $\searrow$. Le premier élément du couple est un pas du chemin du haut du polyomino et le deuxième est le pas du chemin du bas qui se trouve dans la même colonne que l'autre. Par exemple le premier polyomino dessiné dans la figure ayant demi-périmètre 4 peut être représenté par la séquence $(\nearrow,\searrow)(\nearrow,\nearrow)(\nearrow,\nearrow),(\searrow,\nearrow)$.

   Dessiner les différents couples de pas possibles.
3. Montrer qu'un polyomino parallélogramme doit impérativement commencer par le couple $(\nearrow,\searrow)$ et terminer par le couple $(\searrow,\nearrow)$.

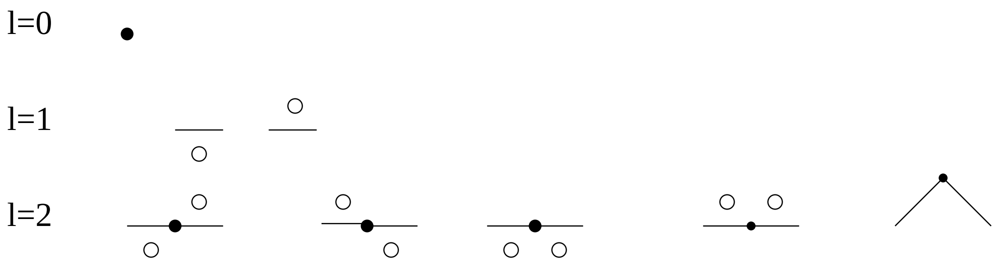

FIG. 3 – Les premiers chemins de Motzkin

Soit $\mathbb{Z}^2$ le plan cartésien discret. Un chemin de Motzkin bicoloré est un chemin faisant des pas unitaires $\nearrow$, $\searrow$, $\overset{\circ}{\rightarrow}$, $\underset{\circ}{\rightarrow}$ qui part de l'origine, ne va jamais en dessous de l'axe des abscisses et qui termine sur cet axe. Le nombre de pas d'un chemin de Motzkin bicoloré est sa *longueur l*. Dans la figure on a représenté les chemins de Motzkin ayant longueur 0, 1, 2.

4. Dessiner les chemins de Motzkin bicolorés ayant longueur 3.
5. On veut décrire une bijection entre les polyominos parallélogrammes de demi-périmètre n et les chemins de Motzkin bicolorés de longueur $n-2$.
   (a) Déduire de la question 3 qu'un polyomino parallélogramme est entièrement défini par la suite ordonnée des couples de pas définissant le polyomino à laquelle on a ôté le premier et le dernier couple.
   (b) Donner une bijection entre les polyominos parallélogrammes de demi-périmètre 3 et les chemins de Motzkin bicolorés de longueur 1.
   (c) En déduire la bijection recherchée.
6. On considère le sous-ensemble S de l'ensemble des chemins de Motzkin bicolorés formé des chemins constitués uniquement de pas $\overset{\circ}{\rightarrow}$ et $\underset{\circ}{\rightarrow}$. Combien y a-t-il de chemins de longueur n dans l'ensemble S ? Combien y a-t-il dans l'ensemble S de chemins ayant longueur n et m pas $\underset{\circ}{\rightarrow}$?

On considère la bijection suivante entre l'ensemble des chemins de Motzkin bicolorés de longueur n et l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n+2$: étant donné un chemin de Motzkin bicoloré on remplace le pas $\nearrow$ par la séquence $\nearrow\nearrow$, le pas $\searrow$ par la séquence $\searrow\searrow$, le pas $\overset{\circ}{\rightarrow}$ par la séquence $\nearrow\searrow$ et le pas $\underset{\circ}{\rightarrow}$ par la séquence $\searrow\nearrow$. On rajoute un pas $\nearrow$ au début et un pas $\searrow$ à la fin du chemin ainsi obtenu.

7. Appliquer la bijection pour les chemins de Motzkin bicolorés de longueur 2.
8. Montrer qu'on obtient bien un chemin de Dyck.
9. Donner la bijection inverse.
10. Donner une formule pour le nombre de chemins de Motzkin bicolorés de longueur n et une formule pour les nombres de polyominos de demi-périmètre n.