

Cours de Combinatoire

26 octobre 2007

1 Rappels sur les ensembles

Définitions

Soit A et B deux ensembles. On note par :

- $|A|$ son cardinal, *c.a.d.* le nombre d'éléments de A ;
- $A \cup B$ l'union de A et B , $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- $A \cap B$ l'intersection de A et B , $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- $A \subset B$ si pour tout x , si $x \in A$ alors $x \in B$;
- $A \setminus B$ la différence de A et B , $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
- $A \times B$ l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tel que $x \in A$ et $y \in B$

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Propriétés

- $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^n| = |A|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2 Applications, fonction caractéristique, arrangements

Définitions

- Soit A et B deux ensembles. Une application ϕ de A dans B , notée par $\phi : A \rightarrow B$, associe à chaque élément $a \in A$ un unique élément de B , noté $\phi(a)$. Formellement on peut voir une application comme un sous-ensemble Φ de $A \times B$ tel que pour tout $x \in A$ il existe un unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in \Phi$.
- Soit $A \subset B$, on définit sa fonction caractéristique $f_A : B \rightarrow \{0, 1\}$ par

$$f_A(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A \\ 1 & \text{si } a \in A \end{cases}$$

Propriétés

- L'ensemble des applications de A dans B a cardinalité $|B|^{|A|}$.
Pour chaque élément de A on a $|B|$ possibilités de choisir son image.
- L'ensemble des fonctions caractéristiques sur l'ensemble B a cardinalité 2^n où $n = |B|$.
Pour chaque élément de B on a deux possibilités de choisir son image.

Il y a une bijection directe entre l'ensemble $P(B)$ des parties de B et l'ensemble des fonctions caractéristiques sur B , donc $|P(B)| = 2^n$, où $n = |B|$.

Définitions

- Une injection $\phi : A \rightarrow B$ est une application telle qu'à chaque élément de B correspond au plus un élément de A . Autrement dit il n'y a pas deux éléments qui ont la même image.
- Un arrangement de n éléments parmi m , est une liste ordonnée de n éléments distincts d'un ensemble à m éléments.

Propriétés

- L'ensemble des injections de A dans B a cardinalité $m(m-1)\dots(m-n+1)$ où $|A| = n$ et $|B| = m$.
On a m possibilités de choisir l'image du premier élément de A , $m-1$ possibilités de choisir l'image du deuxième, etc.
- Le nombre A_m^n d'arrangements de n éléments parmi m est $m(m-1)\dots(m-n+1)$.

Définition

- Une surjection $\phi : A \rightarrow B$ est une application telle qu'à chaque élément de B correspond au moins un élément de A . Autrement dit l'ensemble des images des éléments de A par ϕ est B .
- Une bijection $\phi : A \rightarrow B$ est une application :
 - injective avec $|A| = |B|$,
 - ou encore injective et surjective.

Définition

- Une permutation d'un ensemble E à n éléments est une bijection de E dans lui-même.

Propriété

- Le nombre de permutations est égal à $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$.
L'ensemble des permutations est égal à l'ensemble des injections de E dans E .

3 Double comptage et combinaisons

Principe du double comptage : Si on compte les éléments d'un même ensemble de deux manières différentes on trouve le même résultat.

Exercice : À un mariage, le nombre de gens qui serrent la main à quelqu'un un nombre impair de fois est pair.

Solution : Soit x_i le nombre de fois que la personne i serre la main à quelqu'un et y le nombre total de poignées de main. Par définition $\sum_i x_i = 2y$. Supposons que le nombre de gens qui serrent la main un nombre impair de fois est impair. Alors la somme des x_i correspondants est impaire. Comme les x_i restants sont pairs, la somme totale reste impaire et ne peut être égale à $2y$. Il y a donc une contradiction et la supposition précédente est fausse : le nombre de gens qui serrent la main un nombre impair de fois est pair.

Définition

- Une combinaison de k éléments parmi n est un sous-ensemble de cardinal k d'un ensemble de cardinal n . On note C_n^k ou $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n .

Propriété

- Valeur du coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Par double comptage des arrangements : $k! C_n^k = A_n^k$.

3.1 La formule du binôme

Soit A un anneau et $a, b \in A$ tel que $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On va le montrer combinatoirement et par induction.

Preuve combinatoire. Dans le développement du produit $(a+b)^n$ on a $\binom{n}{k}$ façons de fabriquer le terme $a^{n-k}b^k$: en effet parmi les n facteurs $(a+b)$, il faut choisir k fois b pour obtenir $a^{n-k}b^k$.

Preuve par induction

- Cas de base : $(a+b)^0 = C_0^0$
- Induction : On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, on veut montrer que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= a_{n+1} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
 \end{aligned}$$

On a utilisé la relation du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Exercices

- Calculer $S = \sum_{q=0}^p (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{p-q}$ pour $0 \leq p \leq n$.

On remarque $\binom{n}{q} \binom{n-q}{p-q} = \binom{n}{p} \binom{p}{q}$. De sorte que $S = \binom{n}{p} \sum_{q=0}^p (-1)^q \binom{p}{q} = \binom{n}{p} (1-1)^p = 0$.

- Calculer $S = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n}{p} \binom{p}{k} (-1)^{n-p} t^{n-p+k} (1-3t)^{p-k}$.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} t^{n-p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} t^k (1-3t)^{p-k} \\
 &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-t)^{n-p} (1-2t)^p = (1-3t)^n.
 \end{aligned}$$

3.2 Coefficients multinomiaux

Définition

Etant donnés $n_1 + \dots + n_k = n$ des entiers positifs, le coefficient multinomial $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ est défini par

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Remarquons que si $n_1 + n_2 = n$ alors $\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$, on retrouve les coefficients binomiaux.

Propriété

- Le coefficient multinomial $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ est le nombre de façons de partitionner l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k parties $A_1, \dots, A_k$ disjointes telles que $|A_i| = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$.
Il y a $\binom{n}{n_1}$ façons de choisir les n_1 éléments de A_1 , puis $\binom{n-n_1}{n_2}$ façons de choisir les n_2 éléments de A_2 parmi les $n - n_1$ entiers restants, puis $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$, etc... Finalement

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

- Le nombre de mots de longueurs n sur l'alphabet $\{1, \dots, k\}$ contenant n_i lettres i pour tout $i = 1, \dots, k$ est $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$.

Formule multinomiale

La formule du binome s'étend de la façon suivante :

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

où la somme porte sur les $n_i \geq 0$ tels que $n_1 + \dots + n_k = n$.

4 Formule d'inclusion-exclusion et applications

Proposition

Soit E un ensemble et $A_i \subset E$ des parties de E pour $i = 1, \dots, m$. Alors

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \dots + (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < \dots < i_p} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \\ &\quad + \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|. \end{aligned}$$

Remarque Pour $m = 2$, on retrouve la formule : $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Proposition

Soient A et B deux ensembles de cardinal $|A| = m$ et $|B| = n$. Le nombre de surjections de A dans B est :

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ n! & \text{si } m = n \\ \sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p (n-p)^m & \text{si } m > n \end{cases}$$

Preuve Les cas $m < n$ et $m = n$ sont faciles. Le seul cas demandant une preuve est celui où $m > n$. L'idée est de calculer le nombre d'applications de A dans B et d'enlever celles qui ne sont pas surjectives. Soit

$$A_i = \{f : A \rightarrow B \mid b_i \notin f(A)\}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

On a

$$N = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ non surjective}\} = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

En appliquant le principe d'inclusion-exclusion on obtient

$$|N| = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} (n-p)^m \binom{n}{p}$$

et donc

$$n^m - |N| = \sum_{p=0}^n (-1)^p (n-p)^m \binom{n}{p}$$

.

5 Permutations

Soit σ une permutation de l'ensemble $N = \{1, \dots, n\}$. On peut noter la permutation en forme vectorielle, en notation cyclique et en notation graphique. On donne un exemple où on représente la même permutation avec les trois notations différentes.

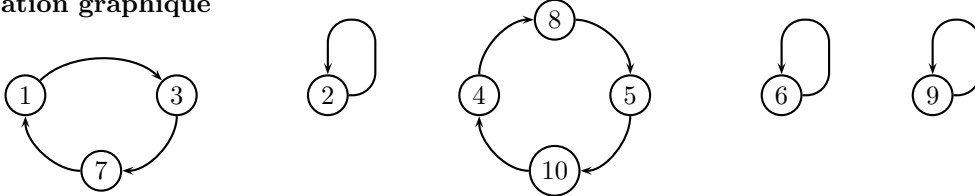
Notation vectorielle On écrit les entiers $1, \dots, n$ et en dessous leurs images respectives :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 10 & 6 & 1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut oublier la première ligne et écrire :

$$3 \ 2 \ 7 \ 8 \ 10 \ 6 \ 1 \ 5 \ 9 \ 4$$

Notation graphique



Notation cyclique On écrit les cycles de la permutation entre parenthèse :

$$(1 \ 3 \ 7) \ (2) \ (4 \ 8 \ 5 \ 10) \ (6) \ (9)$$

Exercice

- Combien de représentations cycliques admet la permutation $3 \ 2 \ 7 \ 8 \ 10 \ 6 \ 1 \ 5 \ 9 \ 4$?

Il faut choisir l'ordre dans lequel on écrit les cycles et pour chaque cycle quel élément on écrit en premier. Cette permutation a donc $5! \cdot 3 \cdot 4$ représentations cycliques différentes.

5.1 Le groupe symétrique

Définition

- Le produit de deux permutations σ et ρ est la permutation $\sigma \cdot \rho$ telle que pour tout i $(\sigma \cdot \rho)(i) = \sigma(\rho(i))$.

Exemple Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$\sigma \cdot \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

On appelle identité la permutation

$$\mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Propriétés

- On a $\sigma \cdot \mathbf{Id} = \mathbf{Id} \cdot \sigma = \sigma$.
- Toute permutation σ a une permutation inverse σ^{-1} telle que $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathbf{Id}$. La permutation σ^{-1} s'obtient en lisant les colonnes de σ de bas en haut.

Exemple La permutation inverse de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque L'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ munie du produit des permutations forme un groupe (le produit est associatif, admet une élément neutre et chaque permutation a un inverse). Ce groupe est noté S_n et on l'appelle le groupe symétrique.

5.2 Transpositions et involutions

Définition

Une transposition est une permutation qui échange deux éléments et laisse les autres fixes. Autrement dit c'est une permutation qui a un cycle de longueur 2 et tous les autres de longueur 1.

Propriété

Le nombre de transpositions d'une permutation $\{1, \dots, n\}$ est $\binom{n}{2}$.

Définition

- Une involution est une permutation telle que $\sigma^2 = \text{Id}$, c'est-à-dire une permutation qui ne contient que des cycles de longueur 2 ou de longueur 1.
- Une involution sans point fixe est une involution ne contenant que des cycles de longueur 2.

Propriété

- Le nombre I_{2n} d'involution sans point fixe est $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.
Par exemple par double comptage des permutations de $\{1, \dots, 2n\}$, on vérifie $I_{2n} \cdot 2^n \cdot n! = (2n)!$.
- Le nombre de permutations avec un cycle de longueur k et les autres de longueur 1 est $\binom{n}{k}(k-1)!$.
On obtient une telle permutation en choisissant les k éléments du cycle (facteur $\binom{n}{k}$), puis en fabriquant le cycle (facteur $(k-1)!$).

5.3 Inversions et tableaux d'inversions

Définition

Une permutation σ a une inversion en (i, j) si le couple (i, j) est tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On dit aussi que $(\sigma(i), \sigma(j))$ est une inversion de σ .

Exemple La permutation 3 2 4 1 a des inversions aux places (1, 2), (1, 4), (2, 4) et (3, 4).

Définition

Le tableau d'inversions d'une permutation σ est le nombre d'inversions commençant à la place i , pour $i = 1, \dots, n$.

Exemple Le tableau d'inversions de la permutation 6 3 2 1 5 4 7 est 5, 2, 1, 0, 1, 0, 0.

Propriété Il y a une bijection entre les tableaux d'inversions et l'ensemble des permutations.

En effet à partir d'un tableau d'inversion on peut reconstruire la permutation en lisant le tableau de gauche à droite : l'entrée courante du tableau indique parmi les éléments encore non placés combien sont plus petits que l'élément recherché. Ainsi dans l'exemple du tableau 5, 2, 1, 0, 1, 0, 0, le 5 en première position indique que $\sigma(1)$ est plus grand que 5 éléments parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, c'est-à-dire que $\sigma(1) = 6$. Puis le 2 indique que $\sigma(2)$ est plus grand que 2 éléments parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, c'est-à-dire que $\sigma(2) = 3$, etc...

6 Génération exhaustive

Souvent le nombre d'objets combinatoires croît très vite en fonction de la taille des objets. S'il est facile de faire la liste des objets de toute petite taille, il devient très vite difficile de ne pas en oublier quand la taille grandit. Un algorithme de génération est un procédé systématique pour engendrer tous les objets combinatoires d'une famille.

6.1 Génération de l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des sous-ensembles d'un ensemble $N = \{1, \dots, n\}$.

1er algorithme (récursif)

- Si $n = 0$ alors $N = \emptyset$ et le seul sous-ensemble est l'ensemble vide : renvoyer $\{\emptyset\}$.
- Sinon
 - Engendrer récursivement l'ensemble P des parties de $\{1, \dots, n-1\}$;
 - Faire une copie de cet ensemble et dans chaque élément de cette copie, ajouter la valeur n :

$$Q = \{E \cup \{n\} : E \in P\}.$$

- Renvoyer l'ensemble des ensembles engendrés $P \cup Q$.

Exemple Si $n = 3$ on a $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Preuve Le 1er algorithme est bien exhaustif car pour former toutes les parties de $\{1, \dots, n\}$ à partir de l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n-1\}$, $\mathcal{P}(\{1, \dots, n-1\})$, il suffit de prendre l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, \dots, n-1\})$, ainsi que toutes les parties de $\mathcal{P}(\{1, \dots, n-1\})$ auxquelles on a ajouté l'élément n .

Représentons chaque sous-ensemble A de $\{1, \dots, n\}$ comme un nombre binaire à n chiffres $x_n \dots x_1$ avec $x_i = 1$ si $i \in A$, $x_i = 0$ sinon. On peut alors engendrer toutes les parties de $\mathcal{P}(N)$ en engendrant tous les éléments de $\underbrace{00 \dots 0}_n$ à $\underbrace{11 \dots 1}_n$:

- On part de $e = \underbrace{00 \dots 0}_n$.
- - **Arrêt** $e = \underbrace{11 \dots 1}_n$.
- **Suivant** Faire l'addition binaire de e et 1.

Exemple Pour $n = 3$, en représentation binaire, on obtient :

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

En termes de parties de $\mathcal{P}(N)$, l'algorithme donne :

- On part avec l'ensemble $A = \emptyset$ et $\mathcal{P} = A$.
 - On cherche le plus petit nombre j de N qui n'est pas dans A :
 - **Arrêt** S'il n'existe pas, c'est à dire si $A = \{1, \dots, n\}$, on est à la fin de l'algorithme.
 - **Suivant** S'il existe on enlève de A tous les nombres plus petits que j et on insère j .
- L'ensemble ainsi obtenu est le nouveau A et $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$. On continue.

Cet algorithme est alors équivalent à l'algorithme suivant :

2ème algorithme

- On part avec l'ensemble $A = \emptyset$.
 - On cherche le plus grand nombre j de N qui n'est pas dans A :
 - **Arrêt** S'il n'existe pas, c'est à dire si $A = \{1, \dots, n\}$, on est à la fin de l'algorithme.
 - **Suivant** S'il existe on enlève de A tous les nombres plus grands que j et on insère j .
- L'ensemble ainsi obtenu est le nouveau A et $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$. On continue.

Exemple Pour $n = 3$ les éléments sont générés dans l'ordre suivant :

$\emptyset, \{3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$.

6.2 Génération des sous-ensembles de N à k éléments.

Algorithme

- On part avec le sous-ensemble $Y = \{1, \dots, k\}$.
- On suppose Y de la forme $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ avec $y_1 < \dots < y_k$. On cherche le plus grand entier i tel que $y_i + 1 \notin Y$:

- **Arrêt.** Si $i = k$ et $y_k = n$, c'est-à-dire si $Y = \{n - k + 1, \dots, n\}$, on s'arrête ;
- **Suivant.** Sinon on augmente y_i de 1 et, à partir de la position $i+1$, on remplace $y_{i+1}, \dots, y_k$ par $y_i + 2, y_i + 3, \dots, y_i + (k + 1 - i)$.

Preuve Avec cet algorithme on engendre tous les éléments en ordre lexicographique. Donc on les engendre tous et une seule fois.

Exemple Pour $n = 5$ and $k = 3$ on engendre dans l'ordre :

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$.

6.3 Génération des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$

- La permutation de départ est $12 \dots n$.
- On cherche le plus grand j tel que $x_j < x_{j+1}$:
 - **Arrêt.** Si un tel j n'existe pas, alors la permutation est $n(n-1) \dots 21$, on est sur la dernière permutation et on s'arrête.
 - **Suivant.** Sinon on échange x_j avec le dernier x_k tel que $x_k > x_j$ avec $k > j$, puis on retourne la séquence des valeurs $x_{j+1}, \dots, x_n$. On continue à partir de cette nouvelle permutation.

Preuve On sait qu'il y a une bijection entre l'ensemble des tableaux d'inversions (section 5) et l'ensemble des permutations. Si on regarde ce que fait l'algorithme sur les tableaux d'inversions, on observe qu'il fait passer d'un tableau $\dots m, (n-j-1), \dots, 1, 0$ à un tableau $\dots m+1, 0, \dots, 0, 0$: à partir d'un tableau on passe au tableau suivant selon l'ordre lexicographique. Donc tous les tableaux sont engendrés une et une seule fois et les permutations aussi.

Exemple Pour $n = 3$ on engendre dans l'ordre :

123, 132, 213, 231, 312, 321,

ce qui correspond à engendrer les tableaux d'inversions dans l'ordre lexicographique :

000, 010, 100, 110, 200, 210.

7 Arbres et chemins de Dyck

Définition 1 – **arbres planaires** *Un arbre planaire est constitué par un noeud, appelé racine, auquel sont attachés par des arêtes un ensemble ordonné (éventuellement vide) de sous-arbres $A_1, A_2, \dots, A_k$. Un arbre planaire peut être donc représenté comme une liste $(r, A_1, A_2, \dots, A_k)$ où chaque A_i , pour $i = 1, \dots, k$ est aussi un arbre planaire. Les racines des sous-arbres $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont dites fils de r , r est leur père et k est dit le arité de r . Les noeuds qui n'ont pas de fils sont dits feuilles.*

- **arbres binaires complets** *Un arbre binaire complet est un arbre planaire ayant des noeuds de arité 0 ou 2. Un arbre binaire complet avec n noeuds internes a $n+1$ feuilles.*

Ils existent des bijections très connues entre ces deux types d'arbres et une classe de chemins dans le plan, appelés chemins de Dyck.

Définition 2 *Soit $\mathbb{Z}^2$ le plan cartésien discret. Un chemin de Dyck est un chemin faisant des pas $\nearrow$ et $\searrow$ qui part de l'origine, reste toujours au dessus de l'axe x et qui termine sur l'axe x . Le nombre de pas du chemin de Dyck est la longueur du chemin.*



FIG. 1 – Un arbre plan avec $n = 9$ nœuds et le mot de Dyck associé.



FIG. 2 – Un arbre binaire avec $n = 4$ nœuds internes et le mot de Dyck associé.

7.1 Une bijection entre les arbres planaires et les chemins de Dyck

Définition 3 Soit $\mathcal{A}$ un arbre planaire à n sommets. On définit alors la suite $\pi(\mathcal{A})$ formée des sommets de $\mathcal{A}$ dans l'ordre préfixe de la manière récursive suivante :

- si $\mathcal{A} = r$ est réduit à sa racine, $\pi(\mathcal{A}) = (r)$;
- si $\mathcal{A} = (r, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$ où r est la racine de $\mathcal{A}$ et où $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$ sont les arbres planaires qui sont les fils de r , on a :

$$\pi(\mathcal{A}) = (r, \pi(\mathcal{A}_1), \dots, \pi(\mathcal{A}_p)) .$$

Dans l'ordre préfixe on rencontre donc d'abord la racine puis les sous-arbres, de gauche à droite.

Le parcours $\Pi(\mathcal{A})$ de l'arbre $\mathcal{A}$ dans l'ordre préfixe est la suite de $2n - 2$ arêtes qu'on rencontre en parcourant les sommets dans l'ordre préfixe. Le mot de Dyck $D(\mathcal{A}) = a_1 \dots a_{2n-2}$ associé à $\mathcal{A}$ est alors défini en posant

$$a_i = \begin{cases} \nearrow & \text{si à la } i\text{ème étape de } \Pi(\mathcal{A}), \text{ on visite une arête pour la première fois} \\ \searrow & \text{si à la } i\text{ème étape de } \Pi(\mathcal{A}) \text{ on visite une arête pour la deuxième fois} \end{cases}$$

Réciproquement, on reconstruit l'arbre à partir d'un chemin de Dyck de la façon suivante : on lit le chemin de gauche à droite, et pour chaque pas, s'il est montant on rajoute une nouvelle arête sur le noeud où on se trouve le plus à droite possible, sinon on remonte d'une arête dans l'arbre.

Cette construction est une bijection entre les arbres planaires avec n nœuds et les mots de Dyck de longueur $2n - 2$.

Remarque On aurait pu aussi définir notre bijection récursivement de la façon suivante :

- si $\mathcal{A} = r$ alors $D(\mathcal{A})$ est réduit au mot vide ;
- si $\mathcal{A} = (r, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$ on a :

$$D(\mathcal{A}) = \nearrow D(\mathcal{A}_1) \searrow \dots \nearrow D(\mathcal{A}_p) \searrow .$$

7.2 Une bijection entre les arbres binaires complets et les chemins de Dyck

On donne une autre bijection avec les chemins de Dyck, cette fois pour les arbres binaires complets : le mot de Dyck associé à un arbre binaire complet est obtenu en faisant un parcours préfixe de l'arbre et en écrivant un pas $\nearrow$ lorsqu'on rencontre un nœud interne et un pas $\searrow$ lorsqu'on rencontre une feuille (on ignore le dernier nœud, qui est forcément une feuille).

Cette construction est une bijection entre les arbres binaires complets avec n nœuds internes et $n + 1$ feuilles et les mots de Dyck de longueur $2n$.

Remarque On aurait pu aussi définir notre bijection récursivement de la façon suivante :

- si $A = r$ alors $D(A)$ est un pas $\searrow$;
- si $A = (r, A_1, A_2)$ on a :

$$D(A) = \nearrow D(A_1) D(A_2) .$$

À la fin on supprime le dernier pas (forcément descendant) de $D(A)$.

7.3 Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$

Théoreme 1 *Le nombre D_n des chemins de Dyck de longueur $2n$ est $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$*

Preuve

On montre que $(n+1)D_n = \binom{2n}{n}$.

- D'un côté on considère l'ensemble E des chemins de Dyck auxquels on rajoute un dernier pas $\searrow$ et dont on colorie un des pas $\searrow$. Ces chemins sont comptés par $(n+1)D_n$ car il y a $n+1$ façons de colorier un pas $\searrow$.
- D'un autre côté on considère l'ensemble F de tous les chemins de longueur $2n$ ayant exactement n pas $\nearrow$ (et donc n pas $\searrow$). Ces chemins sont comptés par $\binom{2n}{n}$.

On donne maintenant une bijection entre ces deux ensembles de chemins, ce qui prouve la formule. Étant donné un chemin de F , de longueur $2n$ ayant n pas $\nearrow$, on rajoute un pas $\searrow$ à la fin du chemin et on colorie ce pas. Le chemin ainsi obtenu termine au niveau -1 . On considère le point P le plus à gauche parmi les points les plus bas de ce nouveau chemin. On divise alors le chemin en deux sous-chemins : le chemin A qui part de l'origine et qui termine au point P et le chemin B qui commence avec P . On remarque que le chemin A doit forcément terminer avec un pas $\searrow$, sinon P ne serait pas un des points plus bas du chemin. On construit maintenant un nouveau chemin, obtenu en prenant B (y compris le dernier pas colorié) et en lui accrochant le chemin A après le pas colorié. Le chemin ainsi obtenu est un chemin qui ne descend jamais en dessous de l'axe x sauf au dernier pas (à cause du choix de P) et qui a un pas descendant colorié. Ce chemin de E est l'image du chemin de départ par notre bijection.

Réciproquement, étant donné un chemin appartenant à E , on le coupe en deux après le pas colorié et on échange les deux chemins ainsi obtenus. On obtient ainsi un chemin avec n pas $\nearrow$ et $n+1$ pas $\searrow$, terminant par le pas descendant colorié. En supprimant ce pas colorié on obtient l'image du chemin de E par la bijection inverse, qui est bien un chemin de F .