Université Paris Diderot
L1 MIASHS, MATH et MATH-INFO

Raisonnements mathématiques
année 2017-2018

Examen du 22 juin 2018
Durée : 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve.
Les réponses doivent être justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 (4 points)

Soient P, Q et R trois énoncés.

(1) Montrer que les énoncés $P \iff (P \wedge Q)$ et $P \implies Q$ sont équivalents.

(2) L'énoncé ci-dessous est-il toujours vrai (c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de vérité des énoncés P, Q et R) ?

$$[(P \Rightarrow \neg Q) \wedge (Q \Rightarrow \neg R)] \Rightarrow (P \Rightarrow \neg R)$$

Exercice 2 (4 points)

(1) Donner les variables de l'énoncé ci-dessous, en précisant si elles sont libres ou liées (justifier) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

(2) Donner, en justifiant, les valeurs de vérité de cet énoncé pour $n = 0$, pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

(3) Démontrer par récurrence que l'énoncé de la question 1 est vrai pour tout entier naturel n.

Exercice 3 (4 points)

Si E et F sont deux ensembles on note $E \times F$ le produit cartésien de E et de F.

(1) Calculer $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$ puis $(A \times C) \setminus (B \times D)$ dans le cas où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, $C = \{5, 6\}$ et $D = \{6\}$.

(2) Soit E un ensemble, et soient A, B, C et D trois sous-ensembles de E. Démontrer l'énoncé :

$$((A \setminus B) \times (C \setminus D)) \subseteq ((A \times C) \setminus (B \times D)).$$

(3) Montrer à l'aide d'un exemple que l'on peut avoir égalité, c'est-à-dire

$$((A \times C) \setminus (B \times D)) = ((A \setminus B) \times (C \setminus D)).$$

Est-ce toujours le cas ?

Exercice 4 (8 points)

Soit E l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et $\mathcal{P}(E)^*$ l'ensemble des parties non vides de E.

(1) Quels sont les cardinaux de $\mathcal{P}(E)$ et de $\mathcal{P}(E)^*$?

(2) On considère l'application $f : \mathcal{P}(E)^* \to E, X \mapsto \min(X)$, où $\min(X)$ désigne le plus petit élément de l'ensemble X (on a par exemple $f(\{2, 4, 5\}) = 2$).

   a. Calculer $f(X)$ successivement pour $X = E$, $X = \{1, 2, 4\}$, $X = \{5\}$.

   b. L'application f est-elle injective ? surjective ? (Justifiez chacune de vos réponses)

   c. Donner tous les antécédents de 3 par f.

(3) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? (Justifiez chacune de vos réponses).

   a. $\forall X \in \mathcal{P}(E)^*\ \forall Y \in \mathcal{P}(E)^*\ (X \subseteq Y \Longrightarrow f(X) \geqslant f(Y))$,

   b. $\forall X \in \mathcal{P}(E)^*\ \forall Y \in \mathcal{P}(E)^*\ (f(X) \geqslant f(Y) \Longrightarrow X \subseteq Y)$,

   c. $\forall X \in \mathcal{P}(E)^*\ \exists Y \in \mathcal{P}(E)^*\ ((X \neq Y) \wedge (f(X) = f(Y)))$,

   d. $\forall X \in \mathcal{P}(E)^*\ \forall Y \in \mathcal{P}(E)^*\ (f(X \cup Y) = \min\{f(X), f(Y)\})$,

(4) Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{P}(E)^*$. À quelle condition $f(X \cap Y)$ est-elle définie ? Quelle relation existe-t-il alors entre $f(X)$, $f(Y)$ et $f(X \cap Y)$?