

Examen du 13 décembre 2017
Durée : 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve.

Les réponses doivent être justifiées.

Les 6 exercices sont indépendants.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

Soient P , Q , R trois énoncés. On note A l'énoncé :

$$(P \vee (\neg R)) \Rightarrow Q$$

et B l'énoncé :

$$\neg(P \wedge (\neg Q) \wedge R).$$

(On rappelle que $\vee$ est le connecteur logique OU, $\wedge$ est le connecteur logique ET).

- (1) Donner les tables de vérité de A et de B .
- (2) Démontrer l'énoncé $A \Rightarrow B$.
- (3) Les énoncés A et B sont-ils équivalents ?

Exercice 2 (4 points)

- (1) Donner les variables de l'énoncé ci-dessous, en précisant si elles sont libres ou liées (justifier) :

$$\sum_{k=0}^n (2 + 3k) = 2(n + 1) + \frac{3n(n + 1)}{2}.$$

- (2) Calculer $\sum_{k=0}^n (2 + 3k)$ pour $n = 0$, pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
- (3) Démontrer par récurrence que l'énoncé de la question 1 est vrai pour tout nombre entier naturel n .

Exercice 3 (3 points)

Donner, s'il en existe, toutes les applications injectives de E dans F dans les cas suivants. S'il n'en existe pas, justifier.

- (1) $E = \{1, 2\}$ et $F = \{5, 6, 7\}$
- (2) $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{5, 6\}$.

Exercice 4 (4 points)

Posons $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3\}$. Soit $f : E \rightarrow F$ l'application définie par :

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0, \quad f(d) = 1.$$

- (1) Quel est le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$?
- (2) L'application f est-elle injective ?
- (3) L'application f est-elle surjective ?
- (4) Soient $x \in E$ et B une partie de F . On considère l'énoncé suivant :

$$x \neq d \Rightarrow f(x) \in B.$$

Donner sa contraposée, puis sa réciproque (aucune justification n'est demandée).

- (5) Déterminer toutes les parties B de F telles que l'énoncé

$$\forall x \in E \quad (x \neq d \Rightarrow f(x) \in B)$$

soit vrai.

Exercice 5 (3 points)

Soit E un ensemble, et soient A , B et C trois sous-ensembles de E . Démontrer l'énoncé :

$$((A \cup B) \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

(On rappelle que pour tout sous-ensemble X de E , par définition $E \setminus X = \{x \in E \mid x \notin X\}$.)

Exercice 6 (3 points)

On rappelle que pour tout nombre réel x non nul, son inverse $\frac{1}{x}$ est bien défini et vérifie $x \times \frac{1}{x} = 1$. Démontrer l'énoncé suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad ((a = 0 \vee b = 0) \iff a \times b = 0).$$