Examen du 24 juin 2016

Deuxième session

Durée 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1.

1. (a) Indiquer dans l'énoncé suivant quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = xz$$

- (b) Indiquer la valeur de vérité de l'énoncé précédent en fonction de la variable z .

2. Indiquer la valeur de vérité de l'énoncé suivant en fonction de la variable z :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 = xz$$

Exercice 2. À la question "Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \sin^2(xy) dx$ ", l'étudiant Z a répondu en donnant une formule $I = F(x)$, dans laquelle x apparaît comme variable libre. Sans calculer l'intégrale I , expliquer pourquoi cette réponse ne peut pas être juste.

Exercice 3. Soient P et Q deux énoncés. Montrer que l'énoncé suivant est toujours vrai :

$$((P \implies Q) \wedge \neg Q) \implies \neg P$$

Exercice 4. Soit E un ensemble. Si F est un sous-ensemble de E , on note $\mathbf{1}_F$ la fonction

$$\mathbf{1}_F : E \rightarrow \{0, 1\},$$

appelée *fonction caractéristique de F* , et qui est définie ainsi :

$$\forall x \in E \quad \mathbf{1}_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in F \\ 0, & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

On considère deux sous-ensembles A et B de E . Montrer l'énoncé suivant :

$$\forall x \in E \quad \mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A \cap B}(x)$$

.../... **T.S.V.P.**

Exercice 5. On appelle *tableau de proportionalité* un tableau de nombres constitué de deux lignes L_1 et L_2 , avec les propriétés suivantes :

- (i) Les deux lignes comportent le même nombre d'éléments, qui sont des réels. Ce nombre est appelé la *taille* des lignes.
- (ii) Il existe un réel λ tel que la ligne L_2 s'obtient en multipliant par λ les éléments correspondants de la ligne L_1 .

Le tableau ci-dessous est un exemple de tableau de proportionalité pour $\lambda = 3$; les lignes sont de taille 4.

$$\begin{array}{l|cccc} L_1 & 0 & 2 & -3 & \frac{2}{3} \\ L_2 & 0 & 6 & -9 & 2 \end{array}$$

Si n est la taille commune des deux lignes L_1 et L_2 , on notera $L_1(1), \dots, L_1(n)$ les éléments de L_1 , et $L_2(1), \dots, L_2(n)$ les éléments de L_2 .

1. Soit L_1 et L_2 deux lignes de réels de même taille n . Traduire sous forme d'un énoncé mathématique la condition (ii).
2. On suppose que L_1 comporte au moins un élément non nul. Montrer que le coefficient λ associé au tableau de proportionalité est unique.
3. On suppose données deux lignes L_1 et L_2 de taille 1. Elles comportent donc chacune un seul élément, $L_1(1)$ pour L_1 et $L_2(1)$ pour L_2 . Montrer qu'elles forment un tableau de proportionalité si et seulement si :

$$(L_1(1) \neq 0) \vee (L_1(1) = 0 \wedge L_2(1) = 0)$$

4. On part du tableau de propotionalité suivant :

$$\begin{array}{l|cc} L_1 & 0 & x \\ L_2 & 0 & \lambda x \end{array}$$

où λ et x sont deux réels fixés. On va étendre ce tableau en augmentant sa taille d'une unité à la fois : à chaque étape, on additionne les deux dernières colonnes de droite pour produire une nouvelle colonne.

- (a) Donner les tableaux obtenus aux deux premières étapes.
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on obtient à la n^e étape un tableau de proportionalité.
Indication : on pourra faire une démonstration par récurrence, en indiquant clairement l'énoncé qu'on se propose de démontrer par récurrence.