

Examen du 14 décembre 2015

Première session

Durée 2 heures

***Téléphones portables éteints et rangés dans le sac
Sacs déposés à l'avant près du tableau
Veuillez conserver votre carte d'étudiant ou une pièce
d'identité***

Exercice 1.

1. Indiquer dans l'énoncé suivant quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes) :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. (a) Indiquer dans l'énoncé suivant quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes) :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad zx < y$$

- (b) Indiquer quel est l'ensemble des valeurs réelles de la variable z pour lesquelles l'énoncé ci-dessus est vrai.

Exercice 2. Soient P , Q et R trois énoncés. Montrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R).$$

Exercice 3. Pour tout nombre entier naturel n , soit la propriété P_n donnée par:

$$P_n : n^2 > n + 4.$$

- La propriété P_n est-elle vraie quel que soit l'entier n ?
- Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie quel que soit le nombre entier naturel n . On pourra distinguer les cas $n = 0$ et $n > 0$.
- Donner un entier n_0 pour lequel la propriété suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies P_n.$$

.../... T.S.V.P.

Exercice 4. Soient A , B et C trois ensembles. Démontrer

$$(A \cup B = A \cap C) \iff (B \subset A \wedge A \subset C).$$

Exercice 5. Donner une preuve soignée de l'énoncé suivant : *Pour tout nombre entier naturel n , le nombre entier $n(n+1)$ est pair.*

Exercice 6. On rappelle qu'on appelle *cardinal* d'un ensemble fini U le nombre d'éléments de U .

Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $X = \{1, \dots, n\}$. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X , et on définit une fonction $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ de la façon suivante :

$$\text{pour } A \in \mathcal{P}(X) \quad f(A) = \begin{cases} A \cup \{1\}, & \text{si } 1 \notin A \\ A \setminus \{1\}, & \text{si } 1 \in A \end{cases}$$

1. Montrer que, quel que soit $A \in \mathcal{P}(X)$, les cardinaux des parties A et $f(A)$ sont de parités opposées.
2. Notons $\mathcal{P}_p(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal pair, et $\mathcal{P}_i(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal impair. Autrement dit, en notant $|A|$ pour le cardinal de A :

$$\mathcal{P}_p(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ est pair}\}, \quad \mathcal{P}_i(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ est impair}\}.$$

Montrer que f établit une bijection entre $\mathcal{P}_p(X)$ et $\mathcal{P}_i(X)$. *Indication* : on pourra remarquer, en le démontrant, que $f \circ f(A) = A$ pour toute partie A de X .

3. En déduire les formules suivantes :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} (-1)^{|A|} = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

4. Que vaut la somme $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} (-1)^{|A|}$ lorsque $X = \emptyset$?