Examen du 26 juin 2015

Deuxième session

Durée 2 heures

Téléphones portables éteints et rangés dans le sac
Sacs déposés à l'avant

Cet énoncé est constitué d'une feuille recto-verso et est composé de sept exercices

Exercice 1.

Dans cet exercice, toutes les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. Indiquer dans cette proposition quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes). Pour les variables muettes préciser le mutificateur.

$$\exists a\ \exists b\ ca + db = e$$

2. Mêmes questions pour :

$$\forall f\ \ \forall g\quad [(f \text{ et } g \text{ sont premiers entre eux}) \Leftrightarrow (\exists h\ \exists i\ \ fh + gi = 1)]$$

   NB : cette proposition est vraie et s'appelle "Théorème de Bezout".

3. Mêmes questions pour

$$\{jk + lm \,|\, (k, m) \in \mathbb{Z}^2\} \neq \emptyset$$

4. Prouver que la proposition de la question 3. est toujours vraie.

Exercice 2.

Prouver que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 3.

1. On suppose que A est vide ou est un singleton (ensemble ayant un élément et un seul), prouver que

$$\forall X\ \ [X \subset A \Rightarrow (X = A \text{ ou } X = \emptyset)]$$

2. Prouver que les seuls ensembles A vérifiant la propriété $\forall X\ \ [X \subset A \Rightarrow (X = A \text{ ou } X = \emptyset)]$ sont l'ensemble vide et les singletons.

Exercice 4.

On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x associe sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1. L'application E est-elle surjective ? Justifier.
2. L'application E est-elle injective ? Justifier.

Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$, on note $E(A)$ son image directe par E et $E^{-1}(A)$ son image réciproque par E. Autrement dit, on a

$$E(A) = \{E(x) \mid x \in A\}$$
$$E^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) \in A\}$$

3. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$ (justifier les réponses) :

   (a) $E^{-1}(\{1\})$
   (b) $E^{-1}\left(\{\sqrt{2}\}\right)$
   (c) $E([0,1[)$
   (d) $E\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$
   (e) $E^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},2\right]\right)$
   (f) $E(\mathbb{R})$

Exercice 5.

1. Prouver l'égalité : $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right[= [0;2]$.

   Aide : Procéder en prouvant une double inclusion.

2. L'ensemble J ci-dessous est un intervalle. Préciser ses bornes. Justifier.

$$J = \bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n},n\right]$$

Exercice 6.

On considère n nombres premiers : p_1, p_2, …, p_n. Prouver que l'entier $N = p_1p_2\dots p_n + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 7.

On rappelle que a est rationnel si et seulement si $\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}^*\ a = \dfrac{p}{q}$.

1. Écrire la négation de la proposition suivante (sans utiliser de quantificateur existentiel) : $\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}^*\ a = \dfrac{p}{q}$. On rappelle qu'un nombre a qui vérifie cette nouvelle propriété est dit irrationnel.
2. Écrire la contraposée de : $(a+b$ irrationnel$) \Rightarrow (a$ irrationnel $\vee\ b$ irrationnel$)$.
3. En déduire que : $\forall a\ \forall b\ [(a+b$ irrationnel$) \Rightarrow (a$ irrationnel $\vee\ b$ irrationnel$)]$.