Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licences de mathématiques et d'informatique
L1 – ***Raisonnement mathématique***

Examen du 15 décembre 2014 (avec correction)

Première session

Durée 2 heures

Téléphones portables éteints et rangés dans le sac
Sacs déposés à l'avant près du tableau
Veuillez conserver votre carte d'étudiant ou une pièce d'identité

Exercice 1.

1. (a) Indiquer dans l'énoncé suivant quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes) :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| \leq r) \wedge (|y| \leq r)\}$$

   Note : le symbole $\wedge$ ci-dessus correspond au ET logique.

   (b) Montrer que l'énoncé ci-dessus est vrai quel que soit le réel positif r.

2. (a) Indiquer dans l'énoncé suivant quelles sont les variables libres (ou parlantes) et quelles sont les variables liées (ou muettes) :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad zx \geq y$$

   (b) Indiquer quel est l'ensemble des valeurs réelles de la variable z pour lesquelles l'énoncé ci-dessus est vrai.

Correction.

1. (a) Les variables x et y sont muettes (mutifiées par le signe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ )$. La variable r est parlante.

   (b) Soit $r \geq 0$, et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = r^2$. Alors $x^2 = r^2 - y^2 \leq r^2$ donc $|x| \leq r$, et on montre de même que $|y| \leq r$. Ceci prouve donc l'inclusion demandée.

2. (a) Les variables x et y sont muettes, mutifiées par les quantificateurs. La variable z est parlante.

   (b) Soit A l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles l'énoncé est vrai. Montrons que $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En effet, si $z = 0$, alors $zx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, en prenant $y = 1$, il n'existe pas de x tel que $zx \geq y$, ce qui montre que $0 \notin A$. Réciproquement, si $z \neq 0$, et si $y \in \mathbb{R}$ est fixé, alors $x = y/z$ vérifie bien $zx \geq y$, donc $z \in A$.

Exercice 2. Soit A et B les ensembles définis en extension par :

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{0, 1, 2, 3\}.$$

On considère la fonction $f : A \to B$ définie par ses valeurs ci-dessous :

$$f(a) = 0 \qquad f(b) = 1 \qquad f(c) = 2$$

1. Quelle est l'image réciproque par f de $\{1, 2\}$? Quelle est l'image réciproque par f de B ?

2. Quelle est l'image directe par f de A ?
3. Donner deux sous-ensembles de B dont l'image réciproque par f est l'ensemble vide. Y en a-t-il d'autres ?
4. Répondre par oui ou non :
   (a) f est-elle injective?
   (b) f est-elle surjective?

Correction.

1. $f^{-1}(\{1,2\}) = \{b,c\}$, $f^{-1}(B) = A$.
2. $f(A) = \{0,1,2\}$.
3. $\{3\}$ et $\{\emptyset\}$ conviennent. Il n'y en a pas d'autre car toute partie X de B vérifiant $f^{-1}(X) = \emptyset$ doit vérifier $X \subset \{3\}$.
4. (a) f est injective.
   (b) f n'est pas surjective.

Exercice 3. Soit la propriété P_n , où n est un entier naturel, donnée par:

$$P_n \ : \ n^3 > n + 6 \,.$$

1. La propriété P_n est-elle vraie quel que soit l'entier n ?
2. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie quel que soit l'entier n.
3. Donner un entier n_0 pour lequel la propriété suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies P_n \,.$$

Correction.

1. La propriété P_0 n'est pas vraie, donc P_n n'est pas vraie pour tous les entiers n.
2. Pour montrer l'implication $P_n \implies P_{n+1}$, considérons $n \geq 0$ tel que P_n soit vraie, c'est-à-dire $n^3 > n + 6$. Alors nous avons :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^3 + 1 > n + 7 \,,$$

en utilisant P_n pour la deuxième inégalité. On obtient P_{n+1} , et donc on a montré $P_n \implies P_{n+1}$.

3. Puisque $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour tout entier n, il suffit de trouver n_0 tel que P_{n_0} soit vraie pour que soit aussi vraie P_n pour $n \geq n_0$. Le plus petit n_0 qui convient est donc $n_0 = 3$, puisque $27 > 9$.

Exercice 4. Soit A un ensemble, x une variable prenant ses valeurs dans l'ensemble A, et soit P et Q deux énoncés ayant x comme unique variable libre. On considère les deux fonctions $f : A \to \{0,1\}$ et $g : A \to \{0,1\}$ définies comme suit, pour $x \in A$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } P(x) \text{ est faux} \\ 1, & \text{si } P(x) \text{ est vrai} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } Q(x) \text{ est faux} \\ 1, & \text{si } Q(x) \text{ est vrai} \end{cases}$$

1. On suppose que la propriété suivante est vraie:
$$\forall x \in A \quad P(x) \implies Q(x).$$
Montrer qu'on a alors:
$$\forall x \in A \quad f(x) \leq g(x).$$
Indication : on pourra, pour chaque $x \in A$, examiner les deux cas $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.

2. On suppose que la propriété suivante est vraie :
$$\forall x \in A \quad f(x) \leq g(x).$$
Montrer qu'on a alors:
$$\forall x \in A \quad P(x) \implies Q(x).$$

3. Soit R la propriété définie par : $R = P \wedge Q$, et soit $h : A \to \{0, 1\}$ la fonction définie par:
$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } R(x) \text{ est faux} \\ 1, & \text{si } R(x) \text{ est vrai} \end{cases}$$
Montrer la propriété suivante :
$$\forall x \in A \quad h(x) = f(x)g(x)\,.$$

Correction.

1. Soit $x \in A$. Raisonnons par cas:

   Cas $f(x) = 0$. Alors l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ s'écrit $0 \leq g(x)$, qui est vérifiée puisque $g(x)$ vaut 0 ou 1.

   Cas $f(x) = 1$. Alors $P(x)$ est vraie. Puisque $P(x) \implies Q(x)$ est vraie par hypothèse, on en déduit que $Q(x)$ est vraie et donc $g(x) = 1$. L'in'egalité $f(x) \leq g(x)$ est vraie aussi dans ce cas.

2. Pour montre $P(x) \implies Q(x)$, supposons $P(x)$ vraie. Alors $f(x) = 1$, donc $g(x) \geq 1$. Comme $g(x) \in \{0, 1\}$, on en déduit $g(x) = 1$, c'est-à-dire $Q(x)$ vraie. On a donc montré l'implication demandée.

3. On raisonne par équivalences. Puisque $f(x) \in \{0, 1\}$ et $g(x) \in \{0, 1\}$, on a:
$$(f(x)g(x) = 1) \iff (f(x) = 1 \wedge g(x) = 1) \iff (P(x) \wedge Q(x)) \iff R(x) \iff (h(x) = 1).$$
Et comme $h(x)$ ne prend aussi que les deux valeurs possibles 0 et 1, on en déduit bien $h(x) = f(x)g(x)$.

Exercice 5. On définit par récurrence la fonction *factorielle* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :
$$f(0) = 1\,, \qquad \forall n > 0 \quad f(n) = nf(n-1)\,.$$

1. Calculer les valeurs $f(1), f(2), f(3), f(4)$.

2. On rappelle qu'un entier a *divise* un entier b s'il existe un entier k tel que $b = ak$, ce qui est noté : $a|b$. Montrer la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \implies f(n)|f(m)\,.$$

Correction.

1. $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 6$, $f(4) = 24$.

2. Pour montrer l'implication, fixons un entier n et montrons par récurrence sur m la proposition $f(n)|f(m)$ pour tous les entiers $m \geq n$.

   Initialisation. Pour $m = n$, on a bien sûr $f(n)|f(n)$.

   Hérédité $m \to m+1$. Soit m tel que $f(n)|f(m)$. Choisissons donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = kf(n)$. Alors nous avons :

   $$f(m+1) = f(m) \times (m+1) = f(n) \times k \times (m+1).$$

   En posant $k' = k \times (m+1)$, on a donc $f(m+1) = k' \times f(n)$ avec $k' \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $f(n)|f(m+1)$.

   Nous conclusons de cette récurrence que, si $m \geq n$, alors $f(n)|f(m)$. Mais n a été choisi arbitrairement, on déduit donc :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \implies f(n)|f(m).$$