EXAMEN	PF1	11/12/2018 12^{15}–14^{15}

aucun document – aucune machine

cinq exercices indépendants – barème indicatif

Lorsque des calculs sont nécessaires, il est impératif de les présenter sur la feuille d'examen.
La qualité de la rédaction et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation :
*les réponses devront être **précises** et **argumentées**.*

Exercice 1 (3 points)

Pour toutes les bases plus grandes que 10, on utilisera comme chiffres complémentaires les lettres de l'alphabet, soit `0123456789ABCDEFG`...

1. Donner l'écriture des nombres suivants en base 2 puis en base 16 : $(\mathtt{45})_{10}$ et $(\mathtt{156})_{10}$.
2. Donner l'écriture en base 2 des nombres suivants : $(\mathtt{12,25})_{10}$ et $(\mathtt{A2,1})_{16}$
3. Pour quelles valeurs de r l'expression suivante est-elle vraie ? $(\mathtt{11})_r \times (\mathtt{10})_r = (\mathtt{110})_r$.
4. En précisant à chaque fois si le résultat peut être considéré comme correct dans l'arithmétique ordinaire, dans la représentation signée en complément à 2 sur 5 bits, poser puis effectuer le calcul

$$\mathtt{10110} - \mathtt{11010},$$

et dans la représentation signée en complément à 2 sur 7 bits dont 3 bits pour la partie fractionnaire, poser puis effectuer le calcul

$$\mathtt{1011,101} + \mathtt{0111,011}.$$

Exercice 2 (4 points)

Considérons le mot $\tau = avadakedavra$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, d, e, k, r, v\}$.

1. Si on utilise un codage de l'alphabet Σ en mots binaires de longueur fixe, quelle est la longueur (fixe) des mots du code ? Quelle est la taille du codage du mot τ ?
2. Donner le tableau associant à chaque lettre de l'alphabet Σ, son nombre d'occurrences dans le mot τ (c'est-à-dire le nombre de fois que cette valeur est répétée dans τ).
3. À partir du tableau, construire l'arbre de Huffman correspondant. Prendre soin de préciser le poids de chaque nœud, la valeur associée à chaque feuille et l'étiquette associée à chaque arc.
4. À partir de cet arbre, coder le mot τ avec le code de Huffman. Quelle est la taille du codage du mot τ ? Dans ce cas, le codage de Huffman permet-il de compresser par rapport au codage de longueur fixe ? Si oui, quel est le taux de compression obtenu ?

Exercice 3 (5 points)

Le code ISBN (International Standard Book Number, Numéro international normalisé du livre) permet d'identifier chaque livre de manière unique dans le monde entier. Il est composé de dix chiffres décimaux : le dernier chiffre est un chiffre de contrôle qui est calculé de la manière suivante. À partir des neuf premiers chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_9$ (de gauche à droite), on calcule la somme

$$S = 10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9.$$

Le chiffre de contrôle a_{10} est l'entier compris entre 0 et 10 tel que $S + a_{10}$ est un multiple de 11 (si a_{10} vaut 10 on écrit alors le chiffre romain X).

1. Déterminer si les codes ISBN suivants sont corrects : 0131653326 et 0139241014.
2. Déterminer le chiffre de contrôle du code ISBN qui commence par les chiffres 069105729.
3. Écrire, en Java, une fonction `isbn` qui reçoit un tableau de neuf entiers en argument et qui renvoie le chiffre de contrôle du code ISBN.
4. Déterminer la valeur du chiffre manquant dans les codes ISBN suivants : 013139□399 et 0023299□00.
5. Montrer que le code ISBN permet de détecter une erreur, c'est-à-dire qu'il peut détecter si un chiffre a_i a été changé en a_i' avec $a_i' \neq a_i$.

Exercice 4 (3 points)

1. Trouver trois mots binaires de 3 bits de sorte que la distance de Hamming entre tous les mots soit toujours de 2.
2. Est-il possible d'avoir un code contenant 3 mots de 6 bits de sorte que la distance de Hamming minimale du code soit 5 ?
3. Recopier et remplir les tableaux suivants en mettant un X là où l'opération est possible.

	Détecter			
Distance de Hamming du code	1 erreur	2 erreurs	3 erreurs	4 erreurs
2				
3				
4				
5				
6				

	Corriger			
Distance de Hamming du code	1 erreur	2 erreurs	3 erreurs	4 erreurs
2				
3				
4				
5				
6				

Exercice 5 (5 points)

Nous voulons réaliser un circuit qui permet de calculer, à partir d'un nombre e représenté en binaire sur 4 bits non-signé $e_3e_2e_1e_0$, une fonction booléenne p_2 qui vaudra 1 s'il y a au moins deux 1 consécutifs dans le mot $e_3e_2e_1e_0$ en entrée et 0 sinon, et une fonction booléenne p_3 qui vaudra 1 s'il y a au moins trois 1 consécutifs dans le mot $e_3e_2e_1e_0$ en entrée et 0 sinon.

1. Quelle sont les valeurs de p_2 et p_3 si l'entrée du circuit code le nombre $(12)_{10}$? Et si l'entrée du circuit code le nombre $(11)_{10}$?
2. Donner la table de vérité pour les deux fonctions p_2 et p_3.
3. À partir de la table de vérité, donner sous forme normale disjonctive les formules correspondant aux fonctions p_2 et p_3.
4. Donner les tableaux de Karnaugh pour les deux fonctions p_2 et p_3.
5. À l'aide de ces tableaux de Karnaugh, simplifier les fonctions p_2 et p_3.
6. À partir des fonctions simplifiées, dessiner le circuit qui calcule p_2 et p_3 à l'aide de portes à deux entrées uniquement.