

Principes de fonctionnement des machines binaires

Durée : 3h. Les documents et les appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas autorisés.

Toutes vos réponses doivent être justifiées. Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

Effectuez les changements de base suivants :

Base 2	Base 8	Base 10	Base 16
11011 ₂			
	3157 ₈		
		2422 ₁₀	
			BC6 ₁₆

On attend le calcul, présenté de manière claire, des valeurs permettant de remplir ce tableau.

Exercice 2 :

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit N l'entier dont l'écriture en base trois est :

$$(N)_3 = \underbrace{22 \dots 22}_{n \text{ fois}}.$$

Question 1 : Montrer que $1 + N = 3^n$ (*indication* : utiliser l'addition en colonnes).

Question 2 : Soit x un entier codé en base trois sur n chiffres exactement, incluant éventuellement des zéros à gauche. On considère l'entier \bar{x} codé également sur n chiffres en base trois, et obtenu en changeant les chiffres de x de la façon suivante :

$$0 \mapsto 2, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 0. \quad \text{Exemple : } (0122)_3 \mapsto (2100)_3.$$

Considérer l'addition en colonnes pour montrer que $x + \bar{x} = N$.

Question 3 : On pose $\tilde{x} = \bar{x} + 1$. Montrer que $\tilde{x} = 3^n - x$.

Question 4 : Montrer que si $x \neq 0$ alors $\bar{x} + 1 < 3^n$. En déduire que \tilde{x} peut être codé sur n chiffres en base 3 si $x \neq 0$.

Question 5 : Montrer que $\tilde{x} \neq 0$ si $x \neq 0$.

Question 6 : Montrer que $\tilde{\tilde{x}} = x$ si $x \neq 0$.

Exercice 3 : Les autorités ont décidé un temps que les plaques d'immatriculation des voitures seraient composées d'un nombre compris entre 1 et 9999, suivi de 3 lettres majuscules, suivi d'un nouveau nombre compris entre 1 et 95.

Question 1 : Combien d'immatriculations différentes était-il possible d'obtenir ?

Question 2 : Combien de bits étaient nécessaires pour identifier chaque véhicule dans le fichier national ?

Question 3 : Pour faciliter les opérations de tri, on a codé chacun des 3 éléments constitutifs de l'immatriculation séparément. Combien de bits étaient nécessaires pour coder chacun de ces éléments ? pour coder chaque immatriculation ?

Question 4 : En codant les 9 caractères d'une immatriculation par le codage ASCII, combien de bits étaient nécessaires pour identifier chaque véhicule dans le fichier national ?

Question 5 : Pour chacun des trois codages ci dessus, donner la place mémoire nécessaire pour lister toutes les immatriculations possibles.

Rappel Le standard ASCII code les caractères alphanumériques de 0 à 127. Les caractères sont alignés sur 8 bits. On y trouve notamment :

- 0 : le caractère terminateur de chaînes de caractères
- 45 : le signe moins -
- 46 : le point .
- de 48 à 57 : les chiffres de 0 à 9
- de 65 à 90 : l'alphabet des majuscules (A à Z)
- de 97 à 122 : l'alphabet des minuscules (a à z).

Exercice 4 :

Un mot mémoire de 32 bits contient la valeur hexadécimale suivante :
7A6F6F00

Question 1 : Quelle est la valeur de chacun des bits ?

Question 2 : Si on suppose que dans cette mémoire est codée la représentation machine d'une suite de caractères ASCII, quelle est la valeur de cette chaîne ?

Question 3 : Si on suppose que dans cette mémoire est codée la représentation machine de deux entiers en format **short**, quelles sont les valeurs de ces entiers ?

Question 4 : Si on suppose que dans cette mémoire est codée la représentation machine d'un réel en format **float**, donner la valeur de ce réel sous la forme $m \times 2^e$, où m et e sont deux entiers exprimés en base 2. Donner un ordre de grandeur de ce nombre.

Exercice 5 :

Soit r le nombre (rationnel) dont la représentation en base 10 est $\frac{428}{9} = 47, (5)^\omega$.

Question 1 : Donner sa représentation en base 2.

Question 2 : Donner sa représentation en float.

Exercice 6 :

On considère l'expression logique suivante : $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow c)$.
(\Rightarrow est aussi noté \supset)

Question 1 : Construire l'arbre α associé à cette expression.

Chaque nœud de l'arbre est la racine d'un sous-arbre qui correspond à une sous-expression de l'expression de départ.

Question 2 : Evaluer en chaque nœud de l'arbre la valeur de la sous-expression lui correspondant, pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 1$.

Question 3 : Ecrire le mot w obtenu par le parcours gauche préfixe de cet arbre et le mot f obtenu par le parcours gauche postfixe de cet arbre.

Question 4 : Dresser la table de vérité de l'expression.

Question 5 : En donner la forme normale disjonctive.

Question 6 : Donner sa forme normale conjonctive.