Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Examen du vendredi 14 décembre 2018

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.

1. On considère le polynôme $Q(u) := u^2 + u - 1$, où $u \in \mathbb{R}$. Déterminez les racines de Q, notées u_+ et u_- de façon telle que $u_- < 0 < u_+$.
2. On considère le polynôme $P(z) := z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, où $z \in \mathbb{C}$. Simplifier $(z-1)P(z)$ de manière à obtenir une quantité étudiée en cours. En déduire les formes exponentielles des solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.
3. Montrez qu'il existe deux racines de P, notées z_+ et z_-, telles que, d'une part, $\operatorname{Re} z_+ > 0$ et $\operatorname{Im} z_+ > 0$ et, d'autre part, $\operatorname{Re} z_- < 0$ et $\operatorname{Im} z_- > 0$.
   Représenter sur une figure les racines du polynôme P en indiquant les points qui correspondent aux nombres z_+, $\frac{1}{z_+}$, z_- et $\frac{1}{z_-}$.
4. On note $T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $T(z) = z + \frac{1}{z}$.
   Calculer $Q\big(T(z)\big)$ et justifier rigoureusement que l'ensemble des solutions de l'équation $Q\big(T(z)\big) = 0$ coïncide avec l'ensemble des racines de P.
5. Exprimer u_+ et u_- en fonction de z_+ et z_-. En déduire une expression pour $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 2.
Soit S_α le système d'équations d'inconnues réelles x, y, z et t suivant :

$$\begin{cases} 2\,x + y + z - 2\,t = 1 \\ -3\,x + y - 4\,z - 2\,t = 1 \\ x - y + 2\,z + 2t = \alpha \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.
On note A_α l'ensemble des solutions du système d'équations S_α.

1. Montrer que A_α n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Résoudre S_1 et en déduire A_1.
3. Déterminer, en le justifiant, les valeurs de α pour lesquelles $A_\alpha \neq \emptyset$.
4. Lorsque $A_\alpha \neq \emptyset$, donner une expression paramétrique (ou équation paramétrique) de A_α.

Exercice 3.
Soit F la partie de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = l - 2\,m \\ y = -l + m \\ z = 3\,l - m \end{cases}$$

où l et m sont des paramètres réels.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $u_1 := (1, -1, 3)$ et $u_2 := (-2, 1, -1)$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F puis donner la dimension de F .
3. Déterminer une équation cartésienne de F.
4. On pose $v := (5, -1, -5)$. Montrer que $v \in F$.
   La famille (u_1, u_2, v) est-elle libre ? Justifier.

Exercice 4. MIASHS/Physique/CPEI/DLPC/STEP
Préciser si, dans chacun des cas suivants, le sous-ensemble A admet une borne supérieure réelle, une borne inférieure réelle (on ne demande pas de les calculer lorsqu'elles existent). Justifier, si besoin à l'aide d'un tableau de variation, chaque réponse.
(a) $A := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 50\}$; **(b)** $A := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq e^x < 1\}$; **(c)** $A := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 1 \leq \frac{1}{2}\}$.

Exercice 4. Math/Math-Info

1. Que peut-on dire de la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n + 3n}{1 + n^2}$?
2. Que peut-on dire de la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{2^n + 1}{n!}$.
3. On pose $A := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leqslant e^x < 1\}$. A admet-il une borne supérieure, une borne inférieure ? Justifier si besoin à l'aide d'un tableau de variation.

Exercice 5. MIASHS
(A) Donner la définition d'un sous-ensemble dense dans $\mathbb{R}$.
(B) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire sur sa limite, si elle existe, si l'on fait les hypothèses suivantes ?

1. on suppose que cette suite est minorée ;
2. on supppose que cette suite est non minorée.

Exercice 5. Math/Math-Info/Physique/CPEI/DLPC/STEP
Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \frac{1}{2-x}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?