Corrigé du partiel du 28 octobre 2017

Exercice 1. (fonctions usuelles, limites et asymptotes)

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ telle que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{3-x}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ en 3^+ et en 3^-.
   Réponse Pour calculer les limites de f en $\pm\infty$, on peut observer que $f(x) = x\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$. De même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$. Pour calculer les limites de f à gauche et à droite en 3, on remarque que le dénominateur est un polynôme, qui prend la valeur 12 en $x = 3$. Comme le dénominateur s'annule en changeant de signe, on en déduit que $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{12}{3-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{12}{3-x} = -\infty$.
2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.
   Réponse On applique la règle de dérivation d'une fraction :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(3-x)-(x^2+2x-3)(-1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x+3}{(x-3)^2} = -\frac{(x-3+2\sqrt{3})(x-3-2\sqrt{3})}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

   On en déduit que f' s'annule en $x = 3-2\sqrt{3}$ et en $x = 3+2\sqrt{3}$. Le tableau de variation est

x	$-\infty$		$3-2\sqrt{3}$		3^-	3^+		$3+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-8+4\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-8-4\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Déterminer les asymptotes verticales et obliques de f.
   Réponse Etant donné les limites à gauche et à droite de f en 3, on déduit tout de suite que

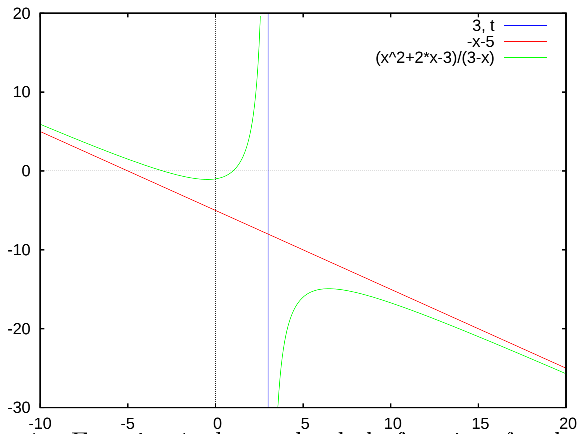

FIGURE 1 – Exercice 1 : le graphe de la fonction f et les deux asymptotes

la droite verticale $x = 3$ est une asymptote de f. Pour déterminer s'il existe des asymptotes à l'infini, on revient sur l'écriture $f(x) = x\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}}$, qui suggère de chercher des asymptotes d'équation $y = -x + c$ en $\pm\infty$. On étudie $f(x) + x$ lorsque $x \to \pm\infty$.

$$f(x) + x = x\left(1 + \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{-1 + \frac{3}{x}}\right) = x\frac{-\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{-5 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x}}.$$

On voit que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+x) = -5$. Donc la droite d'équation $y = -5-x$ est asymptote à f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. La fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \sin(x-3)f(x)$ admet-elle une limite en 3 ? Si oui, déterminer cette limite.
Réponse Pour $x \neq 3$, on peut écrire $g(x) = -\frac{\sin(x-3)}{x-3}(x^2 + 2x - 3)$. Le premier facteur admet une limite en 3, en effet, par le changement de variable $t = x - 3$,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = \cos' 0 = 1.$$

Donc $\lim_{x\to 3} g(x) = -\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x - 3) = -12$.

Exercice 2. (Nombres complexes et trigonométrie)

1. Donner une formule permettant de calculer $\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Réponse Il s'agit de la formule de Moivre :

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

2. Montrer les identités :

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\ .$$

Réponse On applique la formule précédente et la formule du binôme pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos(x)\sin^2 x - i\sin^3 x\\ &= \cos^3 x - 3\cos(x)\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x),\end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant les parties réelles et imaginaires et en utilisant l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 3. (Nombres complexes)

1. Écrire le nombre complexe $16\sqrt{3} - 16\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
Réponse Posons $w = 16\sqrt{3} - 16i$. On a

$$|w| = 16|\sqrt{3} - i| = 16\sqrt{3+1} = 16 \times 4 = 32.$$

On peut donc factoriser

$$w = 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 32(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

avec $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Donc $w = 32e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 16\sqrt{3} + 16\mathrm{i} = 0$.
Réponse Comme $32 = 2^5$,

$$z_n = 2e^{-i\frac{\pi}{6\cdot 5} + i\frac{2\pi}{5}n} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

3. Représenter dans le plan complexe les solutions de l'équation précédente.
Réponse On obtient les sommets du pentagone régulier dessiné sur la figure 2.

Exercice 4. (Polynômes complexes du second degré)

On définit pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \mathrm{i}z^2 - \sqrt{3}z + 1$.

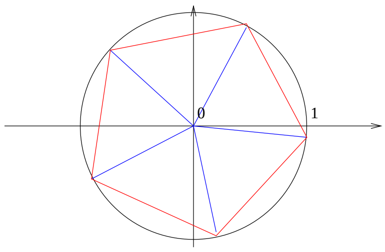

FIGURE 2 – Les racines cinquième de w.

1. Déterminer les racines de P.
   Réponse Le discriminant est $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4i \cdot 1 = 3 - 4i = \delta^2$, avec $\delta = 2 - i$. Donc les racines sont $z = \frac{\sqrt{3} \pm \delta}{2i}$, c'est à dire $z_1 = -\frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$ et $z_2 = \frac{1}{2} - i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$
2. Déterminer $a, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - \mu)(z - \nu)$.
   Réponse $a = i$, $\mu = z_1$, $\nu = z_2$, *id est* $P(z) = i\left(z + \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)\right)\left(z - \frac{1}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)\right)$.

Exercice 5. (Fonctions, bijections)

1. Donner la définition de l'injectivité d'une fonction f.
   Réponse Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f, f est injective si, pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.
2. On pose $g(x) = \arctan(\ln x)$. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ et montrer que g est injective.
   Réponse La fonction arctan est définie sur tout $\mathbb{R}$, donc, pour que $g(x)$ soit définie, il faut et il suffit que $\ln x$ soit défini, donc que $x \in]0, +\infty[$. Donc $\mathcal{D}_g =]0, +\infty[$.
3. Déterminer un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que l'application $g : \mathcal{D}_g \to I$ soit bijective.
   Réponse La fonction ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et la fonction arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $g = \arctan \circ \ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.