Université Paris-Diderot **juin 2017**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires

Examen deuxième session

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1. Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \sqrt{3 + x^2} - 1$.

1. Donner l'ensemble de définition de f. Est-elle continue ? Dérivable ?
2. Montrer que f est une fonction paire.
3. Calculer la dérivée f' de f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer que f est une fonction à valeurs positives.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$.
7. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ et donner l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.
8. Vu que f est une fonction paire, donner directement (sans justification) l'asymptote de f en $-\infty$.
9. Tracer le graphe de f selon les questions 2, 4, 5, 7, et 8.

Exercice 2. On considère l'équation $(\star)\quad z^3 + 4\bar{z} = 0$.

1. Soit $w \in \mathbb{C}$ une solution *non nulle* de $(\star)$, calculer le module $|w|$.
2. En remplacant z par $2e^{i\theta}$ dans $(\star)$, trouver les 4 solutions non nulles de $(\star)$.
3. Écrire ces solutions en forme cartésienne (forme algébrique).
4. Montrer que l'équation $(\star)$ est équivalente à l'équation $z^5 + 16z = 0$.

Exercice 3. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z) déterminé par l'équation paramétrique suivante

$$(a)\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases}$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille de vecteurs $B = \big((1, -1, 2), (1, 2, -1)\big)$ forme une base de V.
3. Donner la dimension de V.
4. Donner une autre base B' de V.
5. Déterminer une équation cartésienne de V.
6. Est-ce que le vecteur $u = (2, 1, 2)$ appartient à V ? Justifier.
7. La famille formée de u et des vecteurs de B est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. 25% Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Info
On définit la suite récurrente suivante : $u_0 \geq 0$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Montrer que, si $u_0 = 3$, alors la suite u_n est constante.
2. On suppose que $u_n \in [0, 3]$, montrer que u_n est une suite croissante et que pour tout n on a $u_n \in [0, 3]$.
3. Déduire de la question précédente que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite.
4. On suppose maintenant que $u_0 > 3$. Quel est le comportement de la suite u_n ?

Exercice 4. 25% Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique réelle.

1. Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
2. Donner une suite explicite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ mais $a_n \neq 1$ pour tout $n \geq 0$.
3. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > 0$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 4. (**25% Partie différentiée réservée aux filières CHIMIE et STEP**)
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse.
Soit f la fonction définie sur $I = [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos(2x)$$

Proposition 1 : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.

Proposition 2 : $f'(x) = \sin(2x)(1 - 4(\sin x)^2)$.

Proposition 3 : La fonction f est décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

Proposition 4 : $\forall x \in I, f(x) \leq \frac{1}{8}$.