Université Paris-Diderot — Année 2016-2017

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Examen partiel du 29/10/2016 (2 heures)

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les réponses doivent être justifiées.
Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires. L'exercice 4 est spécifique à chaque filière.

Exercice 1. Soit $w = 4(1 - i\sqrt{3})$.

1. En calculant le module et l'argument de w, mettre w sous forme exponentielle.
2. Déterminer les solutions z à l'équation $z^3 = w$. On exprimera les solutions sous forme exponentielle.
3. Représenter graphiquement les points d'affixe z où les z sont les solutions à l'équation $z^3 = w$. Quelle figure obtient-on ?.

Exercice 2. Le tableau de carrés donné ci-dessous pourra être utile.

n	11	12	13	14
n^2	121	144	169	196

1. (a) Calculer le module du nombre complexe $u = 5 - 12i$ et vérifier que c'est un nombre entier.
   (b) Déterminer une racine carrée du nombre complexe $u = 5 - 12i$.
2. Résoudre l'équation
$$z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0 .$$

Exercice 3. On veut étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation.
3. (a) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{e^x}\right)$; déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + e^x) - x$.
   (c) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (1 - x)$.
4. Quelles sont les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Présenter les résultats des questions précédentes sous la forme d'un tableau de variations complet.
6. Placer sur un graphique les asymptotes et une esquisse de la courbe, en respectant les résultats obtenus.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Infos

1. Définir la fonction Arccos. Après avoir précisé les ensembles de définition, tracer sur le même plan la courbe représentative du cosinus et de l'Arccos.
2. Déterminer les solutions réelles de l'équation
$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
3. En donnant une expression de $\sin(\pi/2-t)$ en fonction de $\cos t$ valable pour tout t, déterminer les solutions réelles de l'équation
$$\cos(3x) = \sin(\pi/2 - 2x).$$

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH
Soit f la fonction définie par $f(x) = -xe^{1-x}$.

1. Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation.
2. Calculer la dérivée seconde de f et étudier la convexité.
3. Préciser les coordonnées du point d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Chimie/Step, Physique/CPEI
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - 1, & \text{pour } x > 1 \\ \sin(x^2 + x - 2), & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point $x = -2$ et donner une équation de la tangente en ce point.
3. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point $x = 2$ et donner une équation de la tangente en ce point.
4. On admettra que l'application $g :]1, +\infty[\to]-1, 0[$ définie par $g(x) = \frac{2}{x^2+1} - 1$ est bijective. Donner une expression de sa bijection réciproque.