Université Paris-Diderot Année 2016-2017

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Filières Physique, Chimie, CPEI, DLPC, STEP

Examen partiel du 29/10/2016 (2 heures)

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Soit $w = 4(1 - i\sqrt{3})$.

1. En calculant le module et l'argument de w, mettre w sous forme exponentielle.
2. Déterminer les solutions z à l'équation $z^3 = w$. On exprimera les solutions sous forme exponentielle.
3. Représenter graphiquement les points d'affixe z où les z sont les solutions à l'équation $z^3 = w$. Quelle figure obtient-on ?

Exercice 2. Le tableau de carrés donné ci-dessous pourra être utile.

n	11	12	13	14
n^2	121	144	169	196

1. (a) Calculer le module du nombre complexe $u = 5 - 12i$ et vérifier que c'est un nombre entier.
   (b) Déterminer une racine carrée du nombre complexe $u = 5 - 12i$.
2. Résoudre l'équation
$$z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0 \ .$$

Exercice 3. On veut étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation.
3. (a) Calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{e^x}\right)$; déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^x) - x$.
   (c) Calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (1 - x)$.
4. Quelles sont les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Présenter les résultats des questions précédentes sous la forme d'un tableau de variations complet.
6. Placer sur un graphique les asymptotes et une esquisse de la courbe, en respectant les résultats obtenus.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - 1, & \text{pour } x > 1 \\ \sin(x^2 + x - 2), & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = -2$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 2$.
4. On admettra que l'application $g :]1, +\infty[\to]-1, 0[$ définie par $g(x) = \frac{2}{x^2+1} - 1$ est bijective. Donner une expression de sa bijection réciproque.