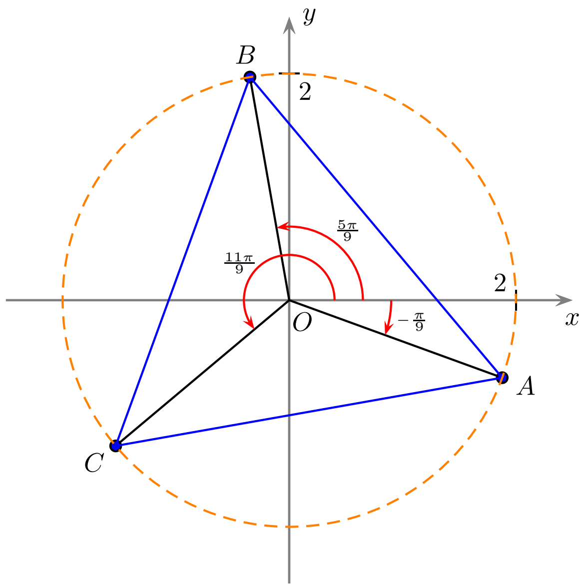
Correction du partiel du 29/10/2016 (2 heures)

Exercice 1. Soit $w = 4(1 - i\sqrt{3})$.

1. Comme $|w| = 4\sqrt{1+3} = 8$, on a $w = 8(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2. Une racine cubique de w est donnée par $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{9}}$. On obtient toutes les racines cubiques de w en multipliant z_0 par les racines cubiques de l'unité qui sont $1, e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$. Les solutions z à l'équation $z^3 = w$ sont donc

$$\{2e^{-i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{5\pi}{9}}, 2e^{i\frac{11\pi}{9}}\}$$

3. Les points d'affixes les solutions de l'équation $z^3 = w$ forment un triangle équilatéral :



Exercice 2. 1. (a) On a $|u|^2 = 5^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169 = (13)^2$, donc $|u| = 13$ est bien un nombre entier.

(b) Le nombre complexe $v = a + ib$ est une racine carrée de u, si et seulement si $v^2 = u$. En identifiant les modules, les parties réelles et imaginaires, on utilise le calcul suivant :

$$v^2 = u \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a^2 - b^2 = 5, \\ 2ab = -12. \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 8, \\ ab = -6. \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -2, \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Les racines carrées du u sont donc

$$v_1 = 3 - 2i \text{ et } v_2 = -3 + 2i$$

2. On calcule : le discriminant Δ de l'équation $z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$.

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4(-5+5i) = 5 - 12i = u$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\frac{1 + 4i + v_1}{2} = 2 + i \text{ et } \frac{1 + 4i + v_2}{2} = -1 + 3i$$

Exercice 3. On veut étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1+e^x \geq 1$ donc $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ de même pour $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. On calcule :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x - e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) < 0$ donc la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On sait que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

(b) On sait que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. On factorise

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$$

Quand x tend vers $+\infty$, $1+e^{-x}$ tend vers 1 donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. De plus

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln(1+e^x) - x$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x = 0.$$

(c) On calcule :

$$f(x) - (1-x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - 1\right) - \left(\ln(1+e^x) - x\right).$$

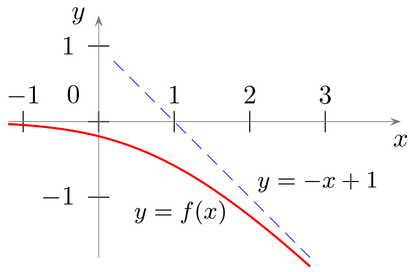
Lorsque x tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0 ainsi que le deuxième terme, par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (1-x) = 0$$

4. De la question (3a) on déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$. De la question (3c) on déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 1-x$ en $+\infty$.
5. Le tableau de variation de f est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

6. La courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes



Instructions pour faire un tracé avec “Sage” :

```
x=var('x')
f =  e^x/(1+e^x) - ln(1+e^x)
G = plot(f,(x,-1.2,2.8))
D = parametric_plot((x,-x+1),(x,0.2,2.8))
show(G+D,xmin=-1.2,xmax=3,ymin=-1.8,ymax=1.4)
```

À tester ici :
`https://sage.math.univ-paris-diderot.fr`

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - 1, & \text{pour } x > 1 \\ \sin(x^2 + x - 2), & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Par composée de fonctions classiques continues, la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$. On a
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1^-} f(x) \text{ et } f(1) = 0$$
donc la fonction est continue en $x = 1$. Par conséquent, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On calcule : la dérivée de f en $x = -2$. Cela revient à évaluer la dérivée de $u(x) = \sin(x^2 + x - 2)$ en $x = -2$. Or $u'(x) = (2x+1)\cos(x^2+x-2)$ donc $u'(-2) = -3$. L'équation de la tangente en $x = -2$ est donc
$$y = -3(x + 2) + u(-2) = -3(x + 2)$$
3. On calcule : la dérivée de f en $x = 2$. Cela revient à évaluer la dérivée de $g(x) = \frac{2}{x^2+1} - 1$ en $x = 2$. Or
$$g'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$$
donc $g'(2) = -\frac{8}{25}$. L'équation de la tangente en $x = 2$ est donc
$$y = -\frac{8}{25}(x - 2) - \frac{3}{5}.$$
4. Soit $y \in]-1, 0[$. On cherche $x \in]1, +\infty[$ tel que $g(x) = y$. On résoud :
$$\frac{2}{x^2 + 1} - 1 = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{2}{y + 1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - y}{y + 1} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1 - y}{y + 1}}$$
La bijection réciproque de g est donc l'application $h :]-1, 0[\to]1, +\infty[$ définie par
$$h(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{x + 1}}$$

Remarque
Voici un tracé du graphe de g :