Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Informatique et MIASH

Examen du Mercredi 14 décembre 2016

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.
On définit, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 2, 3);\ v_2 = (2, 1, 4);\ v_3 = (0, 3, 2);\ w_1 = (-1, 0, 2);\ w_2 = (0, -1, 3)$$

ainsi que les sous-espaces vectoriels $E := \mathrm{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et $F = \mathrm{vect}\{w_1, w_2\}$

1. Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2) est libre.
3. Déterminer la dimension de E et donner une équation cartésienne de E.
4. Montrer que F est un plan de $\mathbb{R}^3$. En donner une équation cartésienne.
5. Déterminer la dimension et une base de $E \cap F$.
6. Extraire un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.
Dans cet exercice z représente un nombre complexe.

1. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
2. Exprimer sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^3 - 1 = 0$.
3. En factorisant $z^3 - 1$ en déduire une expression sous forme exponentielle des racines du polynôme $P(z) = z^2 + z + 1$.
4. Exprimer sous forme algébrique les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
5. En remarquant que
$$\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12},$$
exprimer sous forme algébrique $e^{i\frac{\pi}{12}}$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3.
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} + x - 1$.

1. Justifier que g est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner l'expression de sa dérivée.
3. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
4. Montrer que g admet une asymptote en $+\infty$ et donner une équation de cette asymptote.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$.

Dans la suite on étudie la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ et $f(0) = 1$.

6. Montrer que f est continue au point $x = 0$.
7. Pour $x \neq 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
8. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
9. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.
10. Démontrer que le graphe de f admet une tangente au dessus de la valeur $x = 1$ et déterminer l'équation de cette tangente.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Physique et CPEI et DLPC
Soient E et F deux ensembles de réels non vides et majorés.

1. Montrer que E et F admettent chacun une borne supérieure, que l'on notera respectivement $\sup E$ et $\sup F$.
2. Montrer que $E \cup F$ est majoré et admet une borne supérieure $\sup(E \cup F)$.
3. Montrer que $\sup(E \cup F) = \sup(\sup E, \sup F)$.
4. Donner un exemple de deux ensembles E et F comme précédemment tels que $E \cap F$ n'admet pas de borne supérieure.
5. *Question de cours* — Que peut-on dire d'une suite réelle croissante et majorée ? Citer le théorème du cours et le prouver.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Chimie et Step
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+2}$. Pour $x_0 \geq 0$ on considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 & = x_0, \\ u_{n+1} & = f(u_n), \ \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
2. On suppose dans cette question que $x_0 = 4$.
   (a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite l.
3. Montrer les assertions suivantes :
   (a) $x_0 = l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante ;
   (b) $x_0 > l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ;
   (c) $x_0 < l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ;
4. Montrer que pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Infos
On se propose d'étudier les deux suites $\{u_n\}_{n\geq 0}$ et $\{v_n\}_{n\geq 0}$ définies par les relations récurrentes suivantes :

$$u_0 = 2, \ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}; \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2, \ v_{n+1} = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$$

1. Soit f une fonction continue. Rappeler pourquoi, si elle existe, la limite d'une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\ell = f(\ell)$.
2. Montrer que, pour tout n, on a $u_n \geq 1$.
3. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. La suite $\{v_n\}_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?
6. Montrer que la suite $\{v_{4n}\}_{n\geq 0}$ est convergente [Indication : on pourra commencer par calculer v_4.]

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH

1. Donner la définition d'une suite bornée puis en donner un exemple.
2. Donner la définition puis donner un exemple d'une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une suite convergente est bornée.