Université Paris-Diderot **Juin 2016**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Toutes sections

Examen de deuxième session

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i$.

1. Dans cette partie on cherche à résoudre l'équation $f(z) = 9i$.
   (a) Montrer que résoudre l'équation $f(z) = 9i$ équivaut à résoudre l'équation
   $$z(z^2 - 3iz - 2) = 0.$$
   (b) Déterminer les solutions de l'équation $z(z^2 - 3iz - 2) = 0$.
   (c) Montrer que les trois solutions de l'équation $z(z^2 - 3iz - 2) = 0$ sont sur une même droite du plan complexe.
2. Montrer que si un nombre z est sur l'axe imaginaire, son image $f(z)$ est également sur l'axe imaginaire.
3. Trouver les nombres réels dont les images par f sont sur l'axe imaginaire.

Exercice 2. On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq 2 \right\}, \quad F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < x\right\}.$$

1. Tracer sur une même figure les ensembles E et F.
2. (a) Montrer que E n'est pas inclus dans F.
   (b) Montrer que F n'est pas inclus dans E.
3. Déterminer l'ensemble $G = E \cap F$.
4. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des ordonnées des points (x, y) avec $(x, y) \in G$, c'est-à-dire
   $$A = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x,y) \in G\right\}.$$
   (a) Calculer la borne supérieure de A.
   (b) Montrer que A n'est pas minoré.

Exercice 3. Considérons le système

$$S : \begin{cases} x \quad -3y \quad +4z = 0 \\ -x \quad +2y \quad -2z = -1 \\ 3x \quad -4y \quad +2z = 5 \end{cases}$$

Soit $V = \left\{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v \text{ est solution du système } S\right\}$.

1. Dire, en justifiant votre raisonnement, si l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Résoudre le système S par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs suivante :

$$\mathcal{E} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (-2,0,0), v_3 = (1,1,0), v_4 = (2,2,0), v_5 = (-1,-1,0), v_6 = (1,1,1)\}.$$

1. Trouver deux éléments de $\mathcal{E}$ qui ne forment pas une famille libre (justifier la réponse).
2. Trouver un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ qui est une base de $\mathbb{R}^3$ (justifier la réponse).
3. En vous appuyant sur les points précédents et sans faire de calcul, déterminer si la famille $\mathcal{E}$ est libre.
4. En vous appuyant sur les points précédents et sans faire de calcul, déterminer si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice.
5. Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $v_6 \in \mathcal{B}$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(\pi x^2 - \pi)}{\sqrt{x}} & \text{si } 1 < x \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f est-elle continue au point $x = -1$ et dérivable au point $x = -1$?
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.